質を考察することもある.)

2 つの空間が同相であるか否かを判定するには,*オイラー標数,*ホモロジー群,*基本群などの*位相不変量が用いられる.すなわち,これらは,図形(位相空間)に対して数や群を対応させ,図形が同相であれば,対応する数・群も同じ(同型)であるという性質を持っている.

ポアンカレは,微分方程式の*定性的理論への応用を目的の 1 つとして,位相幾何学を研究した.また,曲面の位相幾何学によって,リーマン面上の複素関数論についての諸事実に対する,幾何学的で明快な説明が与えられた.これは,多変数の複素関数論と高次元(複素)多様体の幾何学の関係として,20 世紀中頃以後大きく発展した.

位相幾何学は 20 世紀以降の代表的な幾何学として現在高度に発展している.

位相空間

topological space

われわれの周りに広がる空間の性質の中から,「遠近」の定性的性質を取り出し抽象化した空間概念が位相空間である.

平面の 2 点 (x,y), (x',y') 間の 2 種類の距離 d_1, d_2 を

$$d_1((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = |x-x'|+|y-y'|$$

で定める.このとき,$d_1 \neq d_2$ であるが,平面上の点列 $\{p_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して $\lim_{n\to\infty} d_1(p_n,p)=0$ であることと,$\lim_{n\to\infty} d_2(p_n,p)=0$ であることは,同値である.このことを,2 つの距離 d_1, d_2 は同じ位相を定めるという.

一方,関数列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して,$f_n(x)$ が各点収束していても,$f_n(x)$ が一様収束するとは限らない.このことを,一様収束の位相と各点収束の位相は異なるという.

すなわち,集合 X 上の位相あるいは位相構造とは,それを X に与えることによって,X の元からなる点列の収束が意味をもつようになる*構造のことで,後述のような公理系を用いて定義される.集合に位相構造を与えたものを位相空間という.位相空間は幾何学,解析学で重要な役割をする.位相空間は一見病的な空間(例えば*カントル集合,*コッホ曲線)や,*連続関数全体の空間のように非常に大きい空間,さらには*p 進数の全体など,非常に広い範囲の空間概念を含む現代数学の基本概念である.また,代数多様体の*ザリスキー位相など,通常の空間とは少し違った概念を定式化する言葉としても,位相空間を用いることができる.

位相構造は,線形構造,群構造などと並び,集合の上に公理系を設定して理論を形成していく数学的構造の代表的例でもある.位相空間の概念は 1914 年に出版されたハウスドルフ(F. Hausdorff)の書物(“Grundzüge der Mengenlehre” (集合論概要))に初めて現れた.

位相空間の公理系にはいろいろなものが知られている.以下には開集合を指定するものを述べる.ほかに,*閉集合を指定するもの,*近傍系を用いるものなどがあり,互いに同値であることがわかっている.

集合 X と,その部分集合の族 $\mathcal{O}$ の組 $(X,\mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき位相空間といい,また $\mathcal{O}$ の元を開集合と呼ぶ.

(1) 空集合 $\varnothing$ と全体集合 X は $\mathcal{O}$ に属する.

(2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ に対して,$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

(3) $\{U_\alpha\}$ を $\mathcal{O}$ の元からなる族とするとき,$\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{O}$.

(2)から有限個の開集合の共通部分は開集合であることがわかるが,無限個の開集合の共通部分は開集合とは限らない.一方,(3)は無限個の開集合の和集合が開集合であることを意味する.

上記の位相空間の概念の下に,*連続写像(連続関数の一般化),*コンパクト性,*連結性などを論じることができる.

位相空間には点列の極限が自然に導入される.位相空間 X の元の列 $\{a_i\}$ $(i \geqq 1)$ に対して,$\{a_i\}$ が $a \in X$ に収束するとは,a を含む任意の開集合 U に対して,N が存在して,$i>N$ ならば,$a_i \in U$ であることをいう.

距離空間は位相空間であり,その最も重要な例である(➡ 距離の定める位相).$\mathbb{R}$ の非可算無限個の直積に*直積位相を与えたものは,距離空間ではない位相空間の例である.

位相空間における収束で,病的な現象が起きるのをさけるためにさまざまな*分離公理が考えられている.⇒ ハウスドルフ空間

位相空間(力学における)

phase space

phase space の訳語として位相空間という言葉が物理学では用いられるが,topological space の

極限 $\lim_{\varepsilon\to 0} \log\log N(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon)$ を ε エントロピーという．ここで ε 網とは，有限集合であって，その ε 近傍が X 全体を含むものをいう．なお，$\lim_{\varepsilon\to 0} \log N(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon)$ は*ハウスドルフ次元である．

ε 近傍

ε-neighborhood

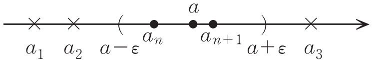
距離 d を持つ距離空間 X において，X の 1 点 a からの距離が正の数 ε より小さい点の集まり，すなわち集合 $\{x\in X|d(x,a)<\varepsilon\}$ を a の ε 近傍という．

ε-δ 論法

ε-δ method

「エプシロン・デルタ論法」と読むことも多い．微分積分学において「任意の ε に対して，ある δ が存在して $\cdots$」「任意の ε に対して，自然数 N が存在して $\cdots$」というような命題が登場する．このような表現は，数列や関数の極限について厳密な叙述や証明を与えるために必須な形式である．この形式に基づいて極限に関する性質を示す方法を，ギリシア文字の ε や δ が現れることに因んで ε–δ 論法という．

例えば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとは「任意の正の数 ε に対し，ある自然数 N が存在し，任意の $n\geqq N$ について $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つ」ことである，と定義される．これは数学特有の表現法で慣れると便利であるが，日本語としてはわかりづらい．これは次のように読みかえるとわかりやすい．「任意の正の数 ε に対して，次の条件を満足するように自然数 N を選ぶことができる．（条件）：任意の $n\geqq N$ について $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つ」．命題の意味するところは，図のように a を中心として幅 2ε の区間を考えるとき，どのように ε を小さくとっても，十分大きい n については a_n がすべてこの小さな区間に入ってしまう，すなわちほとんどすべての a_n はこの小さな区間に入ってしまう，ということである．



また関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは，「任意の正の数 ε に対し，ある正の数 δ が存在し，$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ」ことであると定義される．このとき δ は ε ごとに選べばよい．この定義も「任意の正の数 ε に対して，次の条件を満足する δ が存在する．（条件）：$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ」と読みかえるとわかりやすい．

ε-δ 論法の源は，*エウドクソスによる*取り尽くし法（積尽法）にあり，*ダランベールによる「無限大」「無限小」の取り扱いを経て，*コーシーによって確立された．19 世紀後半に解析学の厳密化の過程で日常的に用いられるようになった．

ε-δ 論法を用いなくても，多くの場合，直観的な論法で収束（極限）を扱うことができるが，場合によっては直観に頼ると間違った結論に達することもある．また，結果が正しい場合にも，ε-δ 論法を用いることにより論点が明確になることもある．

例 1 「無限級数の族 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,\cdots)$ において，各 ν に対して $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\nu)}$ が収束し，各項 $a_n^{(\nu)}$ が $\nu\to\infty$ のとき a_n に収束していれば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する」．

これはコーシーが言明した命題であり，直観的にはもっともらしい．しかし，正しくない．例えば，

$$a_n^{(\nu)} = \begin{cases} 1 & (n \leqq \nu) \\ 0 & (n > \nu) \end{cases}$$

とおけば，これが反例を与える．

例 2 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき，

$$s_n = \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$$

として定義した数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ も a に収束する（チェザロの定理）．これは直観的な極限論法で示すのが困難な最も簡単な例である．ε-δ 論法による証明は次のように行う．任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$|s_n - a| < \varepsilon$$

がすべての $n\geqq N$ に対して成立するような N が存在することを示したい．まず，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることから，x_n は有界，すなわちすべての n について $|x_n|<K$ となる正数 K が存在することがわかる．次に

$$|x_n - a| < \varepsilon/3 \quad (n \geqq N_0)$$

となる N_0 をとる．この N_0 に対して，

$$\frac{KN_0}{N} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{N_0|a|}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるような N $(>N_0)$ をとることができる．すると，$n\geqq N$ に対して

$$\left|\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n) - a\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{N_0} \\
&\qquad + x_{N_0+1} + \cdots + x_n) - a \Big| \\
&= \Big| \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{N_0}) \\
&\quad + \frac{1}{n}\{(x_{N_0+1} - a) + \cdots + (x_n - a)\} \\
&\qquad - \frac{N_0}{n} a \Big| \\
&\leqq \frac{1}{n}(|x_1 + \cdots + x_{N_0}|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(|x_{N_0+1} - a| + \cdots + |x_n - a|) \\
&\qquad + \frac{N_0|a|}{n} \\
&\leqq \frac{KN_0}{n} + \frac{n - N_0}{n}\frac{\varepsilon}{3} + \frac{N_0|a|}{n} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

となるから，$\lim_{n\to\infty} s_n = a$ が証明された．

例 3　関数の連続性と*一様連続性の違いは，ε-δ 論法による定義により明らかになる．

入次数

in-degree

「いりじすう」と読む．⇒ 次数

色付き雑音

colored noise

スペクトル分解したときに一様な密度関数をもつ雑音を白色雑音と呼ぶのに対して，非一様なスペクトル密度関数をもつ雑音を色付き雑音という．数学としては近年研究され始めた「雑音の同型問題」においては若干異なった意味で用いられる．

岩澤分解

Iwasawa decomposition

2 次の*特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ の任意の元は 3 つの行列の積

$$
\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

の形に表示できる．ここで (θ, a, x) は $-\pi<\theta\leqq\pi$，$a>0$ を満たす実数，x は任意の実数である．このような表示はただ一通りに定まる．これを $SL(2,\mathbb{R})$ に対する岩澤分解という．この分解により $SL(2,\mathbb{R})$ は円周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$（これは $SL(2,\mathbb{R})$ の*極大コンパクト部分群），半直線 $\mathbb{R}_{>0}=\{a\in\mathbb{R}|a>0\}$ および実数全体 $\mathbb{R}$ の直積に位相同型であることがわかる．

岩澤分解は一般の*半単純リー群の，コンパクト群，$\mathbb{R}^n$ の形の加法群およびべき零群への分解に拡張される．

岩澤予想

Iwasawa conjecture

岩澤主予想のこと．⇒ 岩澤理論

岩澤理論

Iwasawa theory

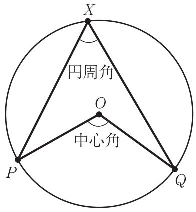
*ゼータ関数は解析的な対象であり，*代数体の*イデアル類群は代数的な対象である．19 世紀に得られた類数公式(➞ 類数公式，ディリクレの類数公式)は，異質なこの 2 つの重要な対象を結びつける．岩澤理論は，類数公式で扱える類数(イデアル類群の位数)だけでなく，*円分体 K のイデアル類群に有理数体上の*ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が作用している様子も，ゼータ関数からわかるという理論であり，ゼータ関数(解析学)とガロア理論(代数学)の結びつきを与えている．岩澤健吉により，1950 年代後半から始められた．

*リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ は，$\zeta(0)=-1/2$，$\zeta(-1)=-1/12$ など，0 以下の整数において有理数の値をとる．19 世紀にクンマーは，それらの値と円分体のイデアル類群の関係を研究した．例えば，$\zeta(-11)=691/(2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13)$ であるが，クンマーの研究からわかることは，ここに 691 が現れることが，1 の 691 乗根を有理数体に添加して得られる円分体の類数が 691 で割り切れることを示しているということである．さらに岩澤理論からわかることは，ここに -11 が現れることも，その体のイデアル類群へのガロア群の作用の仕方として理解できるということである．

p を素数とするとき，$\zeta(s)$ の 0 以下の整数での値の p 進的な性質(例えば $\zeta(-11)$ が 691 で割り切れるように，p の何乗で割り切れるかというような性質)は，久保田–レオポルドの p 進ゼータ関数というものの理論にまとめられる．解析的な対象である「p 進ゼータ関数の零点の分布」と，代数的な対象である「さまざまな円分体 K のイデアル類群の p べき部分の，$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が作用する可換群としての構造」の間には，きれいな関係が見出され，岩澤主予想と呼ばれたが，メイザー(B. Mazur)とワイルス(A. Wiles)によって証明された．

岩澤理論は，リーマンのゼータ関数だけでなく，楕円曲線のゼータ関数など，さまざまなゼータ関

直線 PQ に関して X と反対側にある円周上の点と P と Q からなる弧 $\overset{\frown}{PQ}$ を $\angle PXQ$ に対する弧といい，$\angle PXQ$ を弧 $\overset{\frown}{PQ}$ に対する円周角，または弧 $\overset{\frown}{PQ}$ の上に立つ円周角という．弧 $\overset{\frown}{PQ}$ に対する円周角はすべて等しい．また円の中心を O とすると円周角は対応する中心角 $\angle POQ$ の半分である．



円周等分の問題 cyclotomic problem ⇒ 正多角形の作図

円周率

ratio of circumference of circle to its diameter

円の直径と円周の長さの比を円周率といい π(パイ)と記す．すなわち直径の長さを l とすると円周の長さは πl である．また，半径 r の円の面積 $=\pi r^2$，半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$，体積は $4\pi r^3/3$ である．π はギリシア語の「周」を表す「$\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\varsigma$」の頭文字である．

円周率 π は*無理数であることは 1761 年ランベルト(J. H. Lambert)によって示され，*超越数であることは 1882 年にリンデマン(C. L. F. Lindemann)によって証明された．

π の小数点以下 99 桁までの展開は，

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 7\cdots$$

で与えられる．記号 π はイギリスの W. ジョーンズ(W. Jones, 1675–1749)が 1706 年に出版した著作で使ったのが最初であるが，オイラーが用いたことにより本格的に使われるようになった．

円周率は昔から多くの数学者の関心を引き，その値を求める試みが数学の進展に寄与してきた．文献に残る最初の円周率の計算は古代ギリシアの*アルキメデス(紀元前 250 頃)であり，円に内接および外接する正 96 角形の周の長さを比較計算することによって

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

を得た．直径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さを p_n，一般に外接する正 n 角形の周の長さを P_n とすると

$$p_n < p_{2n} < \cdots < p_{2^m n} < \cdots < \pi < \cdots < P_{2^m n} < \cdots < P_{2n} < P_n$$

であり次の関係式が成り立つ．

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}.$$

これを使うことによって円周率の近似値を求めることができる．オランダの数学者ルドルフ・ファン・コーレン(L. van Ceulen, 1540–1610)は生涯をかけて $n=2^{62}$ まで計算し，小数点以下 35 桁まで正しい円周率を計算した．ドイツでは円周率のことをルドルフ数ということがある．また，江戸時代の鎌田俊清(かまたとしきよ，1678–1747)は $n=2^{44}$ まで計算して小数点以下 24 桁まで正しい値を求めた．

中国三国時代の*劉徽(りゅうき，260 頃)は，内接正多角形を考えるだけで円周率の上と下からの評価ができることを示し，不等式

$$314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}$$

を得た．中国南北朝時代の*祖冲之(そちゅうし，480 頃)はさらに精密な円周率を求め，円周率の近似値として 355/113 を得た．これは小数点以下 6 桁まで正しい近似値を与える．祖冲之はこれを密率と呼んだ．

鎌田俊清を除く江戸時代の和算家は，円周率の計算に内接正多角形のみを用いたが，数列の*加速法を用いて円周率のさらによい近似値を求めることに成功した．*関孝和(せきたかかず)は内接正 2^{17} 角形までの周の長さを求め，エイトケン加速(➞ 加速法)を用いて円周率を小数点以下 12 桁まで正確な値を求めた．また*建部賢弘(たけべかたひろ)は $a_m=p_{2^m}^2$ にリチャードソン加速(➞ 加速法)を適用して $m=10$，すなわち正 1024 角形までの計算で小数点以下 41 桁まで正確な円周率を求めた．これらの加速法は 20 世紀になって数値計算の分野で活用された．

円周率は 3 角関数と密接に関係している．これは

$$p_n = n\sin\frac{\pi}{n}, \quad P_n = n\tan\frac{\pi}{n}$$

と書けることからも推測される．*ヴィエト(1593)は，角数を倍々にふやしていく方法を，次のような π の無限積表示(➞ 無限積)で表した．

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$
$$\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

実際，この等式は，極限公式(➞ 3 角関数)

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \pi$$

と正弦関数，余弦関数の倍角公式(➞ 2 倍角の公式)から得られる．

円周率を*無限級数を使って表すことは 14 世紀後半から 15 世紀に活躍した南インドの数学者マーダヴァによって最初に与えられた．彼は*逆正接関数 $\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$$

を幾何学的考察によって求め，x=1 のときの特殊値として，次の π の無限級数表示を得た．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

この級数は，ヨーロッパではグレゴリー–ライプニッツの級数といわれている(グレゴリー，1671; ライプニッツ，1674)．

こうした無限級数の発見は，*微分積分学の発展を促し，今日では無限級数，無限積などを使った円周率のたくさんの表示が知られている．

(1) ウォリスの等式(1655) (➞ ウォリスの公式)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}$$

は $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$ とおくとき，次の 3 個の等式を組み合わせて得られる．

$$I_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots(2m)}\frac{\pi}{2},$$
$$I_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots(2m)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)},$$
$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

*ガンマ関数 $\Gamma(x)$ の無限積表示を用いれば，この等式は $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ と同等である(スターリング，1730)．

ブラウンカー卿(英国王立協会初代会長)は，ウォリスによる上記の π の表示に触発されて次の*連分数表示を与えた．

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}}$$

(2) 逆正接関数の無限級数展開とマチンの等式(1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

を組み合わせることによって，円周率を求める計算は短時間にたくさんの桁まで計算できるようになった．

建部賢弘(1722)や*松永良弼(まつながよしすけ，1739)らは，数値計算に基づいて逆 3 角関数の級数展開に相当する無限級数を見出し，それを用いて松永良弼は小数点以下 51 桁まで正しい π の小数展開を得た．

(3) 最近得られた表示式として，次のようなものもある(ベイリー，ボールヴィル，プラウフ，1995)．

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

この級数を用いると，円周率の 16 進小数展開の任意の桁に現れる数値をそれ以前の桁の数値を計算することなく，短時間で計算することができる．

円周率は数学の種々の場面で登場する．*ゼータ関数 $\zeta(s)$ の s=2 での特殊値として，次のオイラーの等式(1735)が有名である．

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

さらに，s が正の偶数値 $2m$ に等しいとき，π の $2m$ べきと関係する同様な関係式がある(➞ ベルヌーイ数)．

また，*オイラーの関係式

$$e^{\pi i} = -1$$

は円周率と*自然対数の底 e との関係を与えている．さらに積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

は*ガウス積分と呼ばれ，多くの分野に登場する．

以上のように，円周率の計算は微分積分学などの無限に関わる近代数学への道を拓いた．しかし，現在ではコンピュータと関係して円周率計算のための効率のよいアルゴリズムが研究の対象になっ

ている．

近年，スーパーコンピュータを利用して，π の近似値の精度は飛躍的に高まった．インドの天才数学者*ラマヌジャンによる*モジュラー方程式から導かれる π の表示式(1914)がそのきっかけになっている．ボルウィン兄弟(1987)，チュドノフスキー兄弟(1989)や金田康正(1991)らはラマヌジャンの表示式をさらに精密化し，種々の効率のよい*アルゴリズムを開発し，現在，小数点以下 1 兆桁以上が計算されている．⇒ 円理

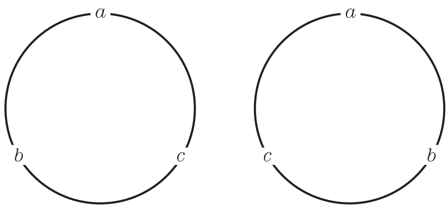
円順列

circular permutation

順列の一種．円周上に n 個のものを並べて，反時計まわりに順列として考えたとき，回転を無視したものである．例えば n=3 のとき通常の*順列 abc に対して bca，cab，abc は同じ順列と考えたものが円順列である．その並べ方の総数は

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

となる．n=3 の場合の円順列は下図の 2 つだけである．

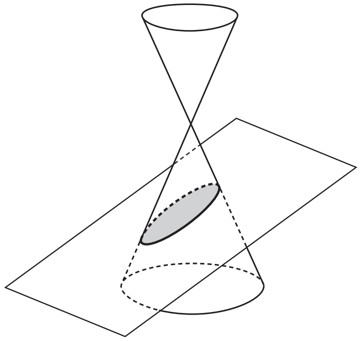


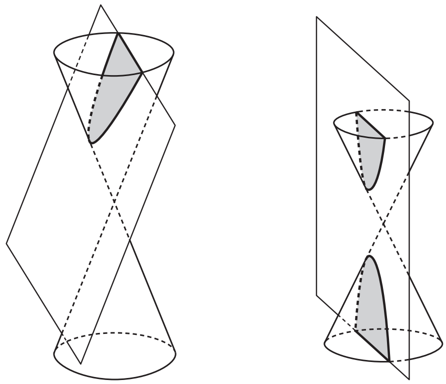
円錐曲線

conic section

円錐を平面で切ったときに現れる曲線，すなわち，円，楕円，放物線，双曲線を円錐曲線という．

座標を使えば，2 変数の 2 次関数 ax^2+bxy+





$cy^2+dx+ey+f$ の零点集合として表される曲線なので，*2 次曲線ともいう．

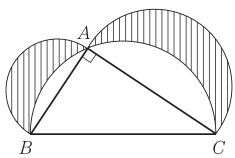
円錐曲線は円の次に自然に現れる曲線図形として古代ギリシアで研究された．*アポロニオスの円錐曲線論が有名であり，*ケプラー，*ニュートンによる惑星の運動の研究に応用された．太陽から重力を受けて運動する物体の軌道は円錐曲線をなす(➞ ケプラーの法則)．

円積問題

quadrature of circle

「与えられた円と等しい面積を持つ正方形を定規とコンパスだけを用いて作図せよ」という問題を円積問題という．古代ギリシアの 3 大作図問題の 1 つである．円周率 π は超越数であるから，この作図は不可能である(リンデマン C. L. F. Lindemann，1882)．⇒ 作図問題

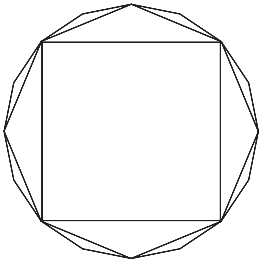
ヒポクラテス(Hippokrates，450 B.C. 頃)は「直角 3 角形 ABC ($\angle A$=直角) の 3 辺を直径とする円から，図のようにできる 2 つの月形の面積の和は，$\triangle ABC$ の面積に等しい」という定理を証明した．



曲線で囲まれたこのように単純な図形の面積が，直線で囲まれた図形の面積に等しいという当時の驚きが，円積問題の背景にあるという．

アンティポン(Antiphon，430 B.C. 頃)は，次のような論法で円積問題が解けると主張した．「円に内接する正方形を作り，その辺を底辺として，

頂点を円周上に持つような 2 等辺 3 角形を作る．さらにその辺上に 2 等辺 3 角形を作って，以下これを繰り返すと正多角形の列ができ，辺が多くなるにつれて，円周に近づいていく．一方，多角形と面積が等しい正方形が作図できるから，結局円と同じ面積を持つ正方形が作図できる」.



この作図には無限回の操作を必要とするので作図問題の通常のルールでは許されないが，このような論法は「*取り尽くし法」の原型となり，*エウドクソスや*アルキメデスによる「無限」の適切な処理が現れる背景となった.

円柱座標

cylindrical coordinates

3 次元ユークリッド空間の点を表すのに，直交座標 (x, y, z) の代わりに xy 平面の極座標表示

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

を用いて，空間の点を座標 (r, θ, z) ($r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$) で表すことができる．曲面 $r=$(一定) は z 軸に平行な円柱を表すので，この座標を円柱座標という.

延長(常微分方程式の解の)

prolongation

常微分方程式 $du/dt = f(t, u)$ の 2 つの解 $u(t)$, $\widetilde{u}(t)$ がそれぞれ区間 $I, \widetilde{I}$ 上で定義されていて，$I \subset \widetilde{I}$，かつ I 上で $u(t) = \widetilde{u}(t)$ が成り立つとき，$\widetilde{u}$ は u の延長であるという．解 u の延長が u 自身に限るとき，延長不能解という．例えば $du/dt = u^2$, $u(0) = C$ $(C > 0)$ の解 $u(t) = C/(1 - Ct)$ は定義区間 $-\infty < t < 1/C$ をこれ以上広げることができず，延長不能解である．どのような解も，それを延長して延長不能解にすることができる．⇒ コーシーの存在と一意性定理(常微分方程式の)

延長不能解

nonprolongable solution ⇒ 延長(常微分方程式の解の)

エントロピー

entropy

エントロピーという用語はクラウジウス(R. J. E. Clausius，1865)に始まり，ギリシア語の $\tau\rho o\pi\eta$(tropē，変化)に由来し，変化容量を意味する造語であり，熱力学において不可逆性を定量的に表す量(エントロピーの増加)として導入された(➞ エントロピー(熱力学の))．その後，古典統計力学におけるボルツマンの研究(1877)において，巨視的状態に対応する微視的状態の数の対数としてエントロピーが捉えられ，不確定性を定量的に表す量という視点が誕生する(➞ エントロピー(統計力学の))．ボルツマン(L. Boltzmann)が導いたエントロピー

$$h = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

(➞ エントロピー(確率の))は，1948 年に情報量として*シャノンが導入した量と同じ形であり(➞ エントロピー(情報理論の))，情報量を，不確定性の減少を表す量として捉える視点が誕生する．さらに，1958 年に*コルモゴロフは*測度論的エントロピーを導入し，力学系の不変量としてのエントロピーはその後の力学系理論・エルゴード理論の発展，また統計力学の数学的理論の展開に大きな寄与をすることとなった(➞ エントロピー(力学系の))．さらに，コルモゴロフは関数空間の大きさを測る量として*ε(イ(エ)プシロン)エントロピーを導入し，また，晩年には，有限列に対するコルモゴロフの複雑度の概念も導入した．このように，エントロピーはさまざまな研究の動機付けにおいて大きな役割を果たしてきているが，数学としてはそれぞれ別の概念であり，とくに，熱力学のエントロピーとそれ以外のものはその性格が著しく異なることに留意するべきである．⇒ エントロピー(分割の)，エントロピー(言語の)，エントロピー増大の原理，位相的エントロピー，相対エントロピー，コルモゴロフ-シナイのエントロピー

エントロピー(確率の)

entropy

確率ベクトル $p = (p_1, \cdots, p_n)$ (すなわち，$p_i \geqq 0$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$)に対して，

$$H(p) = -(p_1 \log p_1 + \cdots + p_n \log p_n)$$

をそのエントロピーという．ただし，$0 \log 0 = 0$ と定める．$H(p)$ は，$p_1, \cdots, p_n$ について対称な連続関数であり，$p_1 = \cdots = p_n = 1/n$ のとき最大値 $\log n$ をとり，$p_i = 1$, $p_j = 0$ $(j \neq i)$ のとき最小値

である．

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ はベクトル，a,b は実数として，外積は $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$，$(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=a(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})+b(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{w}\times(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=a(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+b(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})$ を満たす．外積 $\times$ と内積 $\cdot$ の間には，$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$ なる関係がある．$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ をスカラー 3 重積という．$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を 3 辺とする*平行 6 面体の体積である．

また，$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ なる関係も成り立つ．$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ をベクトル 3 重積という．

外積（線形空間の） exterior product ⇒ 外積代数

外積（微分形式の） wedge product ⇒ 積（微分形式の）

解析学

analysis

*関数の性質を微分積分学を用いて研究する分野を総称して解析学という．常微分方程式論，偏微分方程式論，変分学，複素関数論など，多岐にわたる分野を含む．

その手段である解析的手法は，図形の面積・体積を求めるために*エウドクソスと*アルキメデスが開発した*取り尽くし法（積尽法）まで遡ることができる．17 世紀になって*デカルトらによる解析幾何学が現れ，解析学の発展の基礎が与えられた．*フェルマは，関数の極大・極小を求めるのに，$(f(x+\varepsilon)-f(x))/\varepsilon$ を整理した後に $\varepsilon=0$ とおけば $f(x)$ の極大または極小を与える x を得ることを発見した．また，フェルマとバロー（Barrow）は，曲線の接線を求めるのに，同様なアイデアを用いた．しかし，解析学の真の出発点は，*ニュートンと*ライプニッツにより創始された微分積分学である．微分積分学は別名「無限小解析」ともいわれ，曲線の接線や曲線に囲まれた図形の面積を計算する強力な手段を与えたのである．中でも理論的に重要な発見は，いわゆる*微分積分学の基本定理である．これは，微分の操作と積分の操作が，互いに逆操作であることを主張する．この基本定理は，単に積分計算を実行するのに便利であるということに留まらず，「局所」と「大域」をつなぐ理念的定理として，解析学の発展の過程で常に中心的役割を果たしてきた．

技術的事柄であるとはいえ，解析学の発展に寄与したものの 1 つは，ライプニッツの導入した記号 $dx, \int$ である．それらは独立に実体のある対象を指すものではないが，計算上極めて自然なこともあって，その後の解析学の発展を促した．特に*ベルヌーイ一族の数学者や*オイラーらにより，ライプニッツの記法の下で微分積分学は多岐にわたって応用され，変分学や微分方程式論が花開いた．中でもオイラーの果たした役割は大きい．

しかし，解析学の中心的概念である関数の一般的定義は，19 世紀半ばまで，明確に与えられることはなかった．関数（function）という言葉は，最初ライプニッツにより用いられた．曲線に関係する接線や法線などの直線が定直線を切り取ることによって得られる線分を表すのにこの言葉を用いた（1670 年代）．その後，関数概念は次第に拡張されたが，「解析的な式で表される変動する量」という考え方が大勢であった．

関数概念に真正面から立ち向かう契機は，偏微分方程式の解の表現の問題から起こった．1747 年に，ダランベール（d'Alembert）により，波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

の解 $u(t,x)$ が，境界条件 $u(t,0)=u(t,L)=0$ の下で

$$u(t,x)=f(t+x)-f(t-x)$$

により与えられることが示された．ここで，f は周期 $2L$ の「任意の」周期関数である．一方，D. ベルヌーイにより，上の波動方程式の解が 3 角級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right)$$

を使って表現できることが示された．彼らの結果から，「任意の」関数の意味，そして，3 角級数の収束の意味，さらには関数がいつでも 3 角級数で「表現」できるかが問題になった．これらの問題は，1807 年に*フーリエが*熱方程式に関連して，任意の関数 $f(x)$ の*フーリエ級数が $f(x)$ を表現することを主張したことにより，明確な形で当時の数学者の注意を喚起したのである．

*コーシーは，フーリエの主張の問題点を認識し，級数の収束，関数の連続性，微分可能性，積分可能性の概念を導入した．関数の最初の一般的定義は，1837 年に*ディリクレにより与えられた．ディリクレは，フーリエ級数に関する論文の中で「区間 $[a,b]$ 上の関数 y は，全区間で同一の法則にしたがって変数 x に関係する必要はなく，その

関係が数学的算法により表される必要もない」と言明し，関数とは結局は「対応」にほかならないと主張した．

ディリクレの観点は，*カントルによる集合論によりさらに強固なものになった．そして，フランスのボレル(Borel)，ルベーグ(Lebesgue)らにより集合論に基づいた解析学が展開された．中でもルベーグの創始した積分論(ルベーグ積分論)は，フーリエ級数論を原型とする*関数解析学の勃興を促すきっかけとなった．

関数解析学は，*ヒルベルトによる積分方程式論の研究にも源を持ち，その整理の過程で抽象的な関数空間の理論，例えば*ヒルベルト空間や*バナッハ空間の理論が確立した．他方，関数概念の一般化が，数理科学からの刺激の下で試みられ，L. シュワルツ(Schwartz)，*佐藤幹夫らによる超関数の理論に結実した．

解析関数

analytic function

関数 $f(z)$ が，複素平面上の点 $z=z_0$ の近傍で収束する $z-z_0$ の*べき級数に展開できるとき，$f(z)$ は z_0 で解析的であるという．各点で解析的な関数を解析関数という．実変数の範囲で考える場合にはそれぞれ*実解析的，実解析関数という．*初等関数をはじめとして，われわれが普通に出会う具体的な関数はたいてい解析関数である．

複素平面の領域で定義された複素変数の関数について，複素関数の意味で微分可能であることと解析的であることは同値になる(➞ 正則関数)．実解析関数は実変数の関数として何回でも微分可能であるが，複素関数の場合と異なり逆は成立しない．

与えられた解析関数を*解析接続していくことによって，最大の存在域を持つ(一般には多価の)関数に到達する．これを大域的解析関数と呼ぶ．

解析幾何

analytic geometry

座標を使い図形を式を使って調べる幾何学を解析幾何という．*デカルトに始まる．座標幾何学ともいう．*円錐曲線は解析幾何学の立場では 2 次曲線となる．

解析空間

analytic space

「特異点」の存在を許した*複素多様体の一般化をいう．1 変数の解析関数の定義域は，1 次元の複素多様体であるリーマン面であるが，多変数の解析関数の場合は，特異点を持つ多様体を考えるのが自然である．さらに多変数正則関数系の共通零点や，複素領域を双正則同型群の離散部分群(➞ 離散群)で割った商空間などを考える際には，特異点を持つ複素多様体の概念を避けて通ることはできない．

解析空間を扱うには，*付環空間の概念を用いる．なお*ボレル集合の一般化に解析集合と呼ばれるものがあり，この意味で解析空間ということもある．

解析接続

analytic continuation

複素平面のある領域で定義された*正則関数をより大きな領域上の正則関数に拡張していく手続きを解析接続という．

領域 D とその上の正則関数 $f(z)$ の組 $(f(z), D)$ を関数要素という．関数要素 $(f(z), D)$，$(g(z), D')$ について，$D\cap D'$ が空でなく，かつ $D\cap D'$ 上で $f(z)=g(z)$ が成り立っているとき，$(g(z), D')$ は $(f(z), D)$ の D' への直接解析接続であるという．このとき*一致の定理により $g(z)$ は $f(z)$ からただ 1 つに定まる．*曲線 C: $z=z(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ の各点 a に関数要素 $(f_a(z), D_a)$ (ただし $a\in D_a$)が与えられていて，$|a-b|$ が十分小さければ $(f_b(z), D_b)$ が $(f_a(z), D_a)$ の直接解析接続になっているとき，$f_{z(0)}(z)$ は曲線 C に沿って解析接続可能であるといい，$f_{z(1)}(z)$ は $f_{z(0)}(z)$ の C に沿う解析接続であるという．

あらゆる解析接続を考えることにより最も広い定義域 D を持つ関数が得られる．この関数を関数要素 $(f(z), D)$ の定める大域的解析関数といい，$(f(z), D)$ をその解析関数の D における分枝という．

例えば D: $|1-z|<1$，$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)^n/n$ で定まる関数要素を曲線 $z=(1/2)e^{it}$ に沿って $t=0$ から解析接続していくと，無限に多くの分枝 $f(z)+2\pi in$ $(n\in\mathbb{Z})$ が得られる．これが複素対数関数 $\log z$ である(➞ 対数関数(複素関数としての))．このように大域的解析関数は一般には*多価関数になる．多価解析関数は複素平面の領域の上に広がった*リーマン面上の*1 価関数とみなすことができる．解析接続の実際的な手続きとしては関数方程式や積分表示，*鏡像原理などが用いられる．

開部分群

open subgroup

*位相群の部分群が開集合であるとき，開部分群という．開部分群は同時に閉部分群になる．位相群の単位元を含む*連結成分は開部分群である．

外部問題

exterior problem

例えば球の外側の領域のように，補集合 $\mathbb{R}^n \backslash D$ が有界であるような空間領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ の上で定義される*境界値問題を外部問題という．これと対比して，有界領域上の境界値問題は，しばしば内部問題と呼ばれる．

開平法

extraction of square root

正数 a の平方根 $\sqrt{a}$ の小数展開を求める計算法(*アルゴリズム)のことをいう．

実際には，公式 $(x+y)^2 = x^2 + (2x+y)y$ を使って $\sqrt{a}$ の一番高い桁から順次数値を求めていく．例えば $\sqrt{316159}$ の近似値を求めるには次のようにする．まず 316159 を 1 の位から 2 桁ずつ区切って $31\,|\,61\,|\,59$ とする．これから，$\sqrt{316159}$ の整数部分は 3 桁であることがわかる(3 は 2 桁ずつ区切ったときのブロックの個数である)．平方して 31 を超えない最大の正整数は 5 である．したがって

$$\sqrt{316159} = 500 + a_1,\ 0 < a_1 < 100$$

の形になる．この式の両辺を 2 乗すると

$$316159 = 250000 + (1000 + a_1)a_1$$

を得る．書き換えると $66159 = (1000 + a_1)a_1$ となる．そこで $(100 + x_1)x_1$ が 661 を超えない最大の整数 x_1 を求めると $x_1 = 6$ であることがわかる．これより

$$\sqrt{316159} = 560 + a_2,\ 0 < a_2 < 10$$

と書けることがわかる．すると

$$316159 - 560^2 = 2559 = (1120 + a_2)a_2$$

が成り立つ．$(1120 + x_2)x_2$ が 2559 を超えない最大の整数は 2 であることがわかる．したがって

$$\sqrt{316159} = 562 + a_3,\ 0 < a_3 < 1$$

が成り立つ．以下，同様の考察を行えば小数点以下必要な桁数まで求めることができる．

実際の計算は次のように行うとわかりやすい．平方して 31 を超えない最大の正整数 5 を 31 の上と 316159 の左に記し，さらにその 5 の下に 5 を記して $5 \times 5 = 25$ を 31 から引いて 6 を得，さらに 61 を 6 の右に下ろす．

		5		
5		31	61	59
5		25		
		6	61	

次に左側で $5+5=10$ を求め，$(100+x_1)x_1$ が 661 以下であるような最大の整数 $x_1=6$ を求め，61 の上に 6 を記し，さらに左側の 10 の右側に 6 を記し，さらに 6 の下に 6 を記して $106 \times 6 = 636$ を求める．

		5	6	
5		31	61	59
5		25		
10	6	6	61	
	6	6	36	

次に $661-636=25$ を求めて，その右に一番上より 59 を下ろす．さらに左側では $106+6=112$ を計算する．

		5	6	
5		31	61	59
5		25		
10	6	6	61	
	6	6	36	
11	2		25	59

次に $(1120+x_2)x_2$ が 2559 以下で最大である整数 $x_2=2$ を求め，一番上の数 59 の上に 2 を記し，さらに左側の 112 の右側に 2 を記し，この 2 の下に 2 を記して $1122 \times 2 = 2244$ を 2559 から引く．

			5	6	2
5			31	61	59
5			25		
10	6		6	61	
	6		6	36	
11	2	2		25	59
		2		22	44

これで，求める平方根の整数部分は求まったので，562 の後に点を打って，以下，小数点以下の数値の計算を同じ方法で行う．小数点以下でも 2 桁ずつ区切って議論することに注意する．小数点以下 2 桁まで計算した結果を以下に記す．

					5	6	2.	2	8
5					31	61	59		
5					25				
10	6				6	61			
	6				6	36			
11	2	2				25	59		
		2				22	44		
11	2	4	2			3	15	00	
			2			2	24	84	
11	2	4	4	8			90	16	00
				8			89	95	84
								20	16

$(562.28)^2 = 316158.7984$ となるので，平方根のよい近似値が求められたことがわかる．⇒ 開立法

開立法

extraction of cubic root

正数 a の小数展開が与えられているとき，立方根 $\sqrt[3]{a}$ の小数展開を求める計算法(*アルゴリズム)のことをいう．

実際には

$$(x+y)^3 = x^3 + (3x^2 + 3xy + y^2)y$$

を使って $\sqrt[3]{a}$ の一番高い桁から順次数値を求めていく．

例えば $\sqrt[3]{9828}$ を求めるには，9|828 のように 1 の位から 3 桁ずつ区切ると，ブロックの数が 2 であるので $\sqrt[3]{9828}$ の整数部分は 2 桁の数であることがわかる．事実，$20^3 = 8000$ であるので

$$\sqrt[3]{9828} = 20 + a_1, \quad 0 < a_1 < 10$$

であることがわかる．

$$\begin{aligned} 9828 &= (20 + a_1)^3 \\ &= 8000 + (1200 + 60a_1 + a_1^2)a_1 \end{aligned}$$

より $(1200+60y+y^2)y$ が 1828 $(=9828-8000)$ 以下であり，かつ 1828 に一番近くなるように整数 y を選ぶと $y=1$ であることがわかる．したがって

$$\sqrt[3]{9828} = 21 + a_2, \quad 0 < a_2 < 1$$

であることがわかる．

次に

$$\begin{aligned} 9828 &= (21 + a_2)^3 \\ &= 9261 + (1323 + 63a_2 + a_2^2)a_2 \end{aligned}$$

より

$$(1323 + 63a_2 + a_2^2)a_2 = 567$$

であるので $(1323+63y+y^2)y$ が 567 以下でかつ 567 に一番近い小数点 1 桁の数は 0.4 である．したがって

$$\sqrt[3]{9828} = 21.4\cdots$$

であることがわかる．以下同様の操作を続ければ，小数点以下必要な桁数まで求めることができる．⇒ 開平法

回路

circuit

物理的な電気回路を指すことが多い．その数学モデルは，素子の接続関係を表す有向グラフ (V, A) と，素子の物理特性で与えられる．ここで，各辺は素子を表し，素子特性は辺 a を流れる電流 ξ_a と電圧 η_a の満たすべき関係によって記述される．例えば，線形抵抗の場合にはオームの法則 $\eta_a = R_a \xi_a$ である(R_a は抵抗値)．グラフ (V, A) の*接続行列を N とすると，電流ベクトル $\xi = (\xi_a \,|\, a \in A)$ はキルヒホフの電流保存則($N\xi = 0$)に従い，電圧ベクトル $\eta = (\eta_a \,|\, a \in A)$ はキルヒホフの電圧保存則($\exists p\colon \eta = p^{\mathrm{T}} N$) に従う．素子特性，電流保存則，電圧保存則から回路全体の電流と電圧が定められる．なお，これとは別に，グラフにおける*閉路を回路と呼ぶこともある．

カヴァリエリ

Cavalieri, Bonaventura

1598–1647　イタリアの数学者．神父であり，ガリレオに認められて微分積分学の誕生期に*カヴァリエリの原理を見出し，積分論の進展に寄与した．平面図形は無数の平行線分からなる全体者と見て，これらの線分を平面図形の不可分者と呼び，面積や体積は「不可分」の方法(method of indivisible)により計算されるとした．これは，面積は線分から構成され，体積は面積から構成されるという考え方である．この考え方に基づき，同じ高さの 2 つの平面図形を平行線で切るとき，切り口の線分の長さの比が常に一定値 k であれば，図形の面積の比は k である，立体図形に対しても類似の性質が成り立つ，というカヴァリエリの原理を示した．

カヴァリエリの原理

Cavalieri's principle

「2 つの立体図形 A, B を平面上におくとき，底面(図形をおいた平面)から同じ高さにある平面による A,B の切断面の面積が常に一致すれば，A の体積は B の体積に等しい」という原理をいう．

のガロア拡大ではない．

ガロア拡大については，上の自己同型群 G は L の K 上の*ガロア群と呼ばれ $\mathrm{Gal}(L/K)$ と書かれる．ガロア拡大においてはガロア理論が展開される．⇒ ガロア理論，ガロア理論の基本定理

ガロア群(ガロア拡大の)

Galois group

拡大体 L/K に対して，体 L の体 K 上の自己同型 σ は

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)\quad(\alpha,\beta\in L),$$
$$\sigma(\alpha\beta)=\sigma(\alpha)\sigma(\beta)\quad(\alpha,\beta\in L),$$
$$\sigma(a)=a\quad(a\in K)$$

を満足する L から L への全単射である．L の K 上の自己同型全体は写像の合成によって*群をなす．恒等写像がこの群の単位元である．L/K が有限次*ガロア拡大のときこの群を L/K のガロア群と呼び，$\mathrm{Gal}(L/K)$ と記す．$\mathrm{Gal}(L/K)$ の位数は，拡大次数 $[L{:}K]$ に等しい．

ガロア群(方程式の)

Galois group

体 K の元を係数に持つ n 次方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

の根を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ と記すとき，体 K にこれらの根を*添加してできる体 $L{=}K(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は K の*正規拡大体であり，さらに*分離拡大のとき*ガロア拡大である．このとき，L/K のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ を方程式(1)のガロア群という．

$\sigma{\in}\mathrm{Gal}(L/K)$ に対して $\sigma(\alpha_i)$ は方程式(1)を満足するので，ガロア群の各元は方程式(1)の根の間の置換を引き起こす．したがって，ガロア群から根の置換群としての n 次の*対称群 S_n への群の*準同型写像 $\iota\colon\mathrm{Gal}(L/K){\to}S_n$ ができる．この準同型写像は単射であり，この写像によって方程式(1)のガロア群を方程式(1)の根の置換群の部分群と見ることができる．言い換えると，方程式(1)の根の置換のうちで，拡大体 L の K 上の自己同型を引き起こすもの全体が方程式のガロア群である．このことから，n 次方程式のガロア群は n 次対称群 S_n の部分群と同型であることがわかる．

例えば，方程式

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \tag{2}$$

の根は $\{\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4\}$ で与えられる．ここで ζ は 1 の原始 5 乗根

$$\zeta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

とする．これらの根の置換 σ がガロア群の元を定義するためには，$\sigma(\zeta){=}\zeta^m$ であれば $\sigma(\zeta^k){=}\sigma(\zeta)^k{=}\zeta^{km}$ が成立しなければならないことがわかる．すなわち，ζ の行き先 $\sigma(\zeta)$ によってガロア群に属する置換は決定されてしまう．さらに，有理数体 $\mathbb{Q}$ にこの方程式の根を添加してできる体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ の元は

$$\xi=a_1\zeta+\cdots+a_4\zeta^4\quad(a_i\in\mathbb{Q})$$

と一意的に書けるので，$\sigma(\zeta){=}\zeta^m$ $(1{\leqq}m{\leqq}4)$ は

$$\sigma(\xi)=a_1\zeta^m+a_2\zeta^{2m}+\cdots+a_4\zeta^{4m}$$

と定義することによって $\mathbb{Q}$ 上の体としての自己同型 σ を定める．これより，方程式(2)のガロア群は $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ と同型であることがわかる．

方程式の根の置換群はラグランジュによって考察されたが，体の同型との関係をもとにガロア群を初めて定義したのはガロアである．

ガロア対応

Galois correspondence

*ガロア拡大 L/K のガロア群を G と記す．拡大 L/K の中間体 M (すなわち $K{\subset}M{\subset}L$ となる体)に対して

$$H=\{\,g\in G\,|\,\text{すべての元 } a\in M \text{ に対して } g(a)=a\}$$

とおくと，H はガロア群 G の部分群である．逆に G の部分群 H に対して

$$M=\{\,a\in L\,|\,\text{すべての元 } h\in H \text{ に対して } h(a)=a\,\}$$

とおくと，M は拡大 L/K の中間体である．そして $M{\mapsto}H$, $H{\mapsto}M$ は互いに逆の対応であり，L/K の中間体と G の部分群の間の 1 対 1 対応を与える．この対応をガロア対応という．ガロア対応について*ガロア理論の基本定理が成立する．

ガロア理論

Galois theory

ガロア理論は方程式の*根の公式を求める努力から生まれた理論である．3 次，4 次方程式の根の公式にならって 5 次方程式の根の公式を求める努力が行われたが成功しなかった．ラグランジュは方程式の根の公式を求める方法と方程式の根の置換との間に関係があることを見出し，アーベルは一般の 5 次方程式ではその係数からべき根を使った根の公式を見出すことはできないことを示した．ガロアはラグランジュとアーベルの観点を高い立

(3) (分配律)　任意の元 a, b, $c \in R$ に対して

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$
$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

環の定義では積に関する単位元の存在を仮定する場合も多い．その場合は(2)(a)に加えさらに次の条件を課す．

(b) 任意の元 $a \in R$ に対して $a\cdot 1=1\cdot a=a$ が成り立つ元 $1 \in R$ が存在する．(1 を単位元と呼ぶ.)

環 R の任意の 2 元 a, b に対して常に $ab=ba$ となるとき環 R は可換環であるという．$ab \neq ba$ となる元が存在するときは非可換環という．整数の全体 $\mathbb{Z}$ は可換環であり，環であることを強調するときは*整数環という．$\mathbb{R}$ あるいは体 K の元を成分とする $n\times n$ 行列の全体 $M(n,\mathbb{R})$ あるいは $M(n,K)$ は行列の加法，乗法に関して $n \geqq 2$ のとき非可換環である．

環 R の空でない部分集合 S が R の加法と乗法に関して閉じている，すなわち $a,b \in S$ であれば $a+b \in S$, $ab \in S$ であるとき，S を R の部分環という．$1 \in R$ のときは部分環といえば，その 1 が S に含まれることを要求することが多い．⇒ イデアル，準同型写像，剰余環，多項式環

関係

relation

例えば*同値関係 $x \sim y$ や*順序関係 $x \leqq y$ のように，集合 X の 2 つの要素 x, y の間に関係 xRy があるとき，直積集合 $X\times X$ の部分集合 $R=\{(x,y)|xRy\}$ が決まり，$(x,y)\in R$ と xRy は同値になる．すなわち，X の 2 つの要素の間の関係とは，$X\times X$ の部分集合 R のことである，と定義する．一般に，直積 $X_1\times\cdots\times X_n$ の部分集合 R を $X_1,\cdots,X_n$ の上の n 項関係という．とくに，$n=2$ のとき $X\times X$ の部分集合 R を 2 項関係という．⇒ 推移律，反射律

還元(素イデアルを法とする)

reduction

整数を係数とする方程式(例えば，$10x+3y=5$, $x^2=10$ など)を，素数を法とする*合同式として考えることの一般化．

*代数的整数環 $\mathcal{O}_K$ の元を係数とする方程式

$$\sum_i a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}=0 \quad (a_{i_1\cdots i_n}\in\mathcal{O}_K)$$

に対して，$\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ を法として

$$\overline{a}_{i_1\cdots i_n}=a_{i_1\cdots i_n} \pmod{\mathfrak{p}}$$

を $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ の元とみると $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ を係数にもつ方程式

$$\sum_i \overline{a}_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}=0$$

を考えることができる．この考えを代数体 K 上定義された*射影多様体 V の定義方程式に適用することによって，体 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}=k$ で定義された射影多様体(射影的集合となることもある) $\overline{V}$ が構成できる．$\overline{V}$ を，$\mathfrak{p}$ を法として V を還元してできた射影多様体という．

函手，関手

functor

位相空間 X に対して，その上の連続関数全体を $C(X)$ と書くと，$C(X)$ は可換環になる．また，連続写像 $F\colon X\to Y$ が与えられると，連続関数の*引き戻しによって，環の準同型写像 $f\mapsto f\circ F\colon C(Y)\to C(X)$ が対応する．

位相空間 X に対して，その*ホモロジー群 $H_*(X)$ を対応させることができる．さらに，位相空間の間の連続写像 $f\colon X\to Y$ に対して，そのホモロジー群の間の準同型写像 $H_*(X)\to H_*(Y)$ が対応する．

このように，ある数学的対象に対して，別の数学的対象を組織的に対応させる対応を函手(かんしゅ)と呼ぶ．

連続関数全体を対応させる函手の場合には，対応する写像の向きが逆向きになるので，反変函手と呼び，ホモロジー群を対応させる函手の場合には，対応する写像の向きがもとの写像と一致するので，共変函手と呼ぶ．

正確には次のように定義される．$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ を*圏とするとき，$\mathcal{C}_1$ から $\mathcal{C}_2$ への共変函手とは，$\mathcal{C}_1$ の対象全体 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ から $\mathcal{C}_2$ の対象全体 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)$ への写像 F と，$A,B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ に対する写像

$$F_{A,B}\colon\ \mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(F(A),F(B))$$

であって，

(1) $F_{B,C}(g)\circ F_{A,B}(f)=F_{A,C}(g\circ f)$,

(2) $F_{A,A}(1_A)=1_{F(A)}$

なるものをいう．ここで $1_X\in\mathrm{Hom}(X,X)$ は恒等射(➞ 圏)である．また $\mathcal{C}_1$ から $\mathcal{C}_2$ への反変函手とは，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)$ から $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ への写像 F と，A, $B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ に対する写像

$$F_{A,B}\colon\ \mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(F(B),F(A))$$

であって，

(1) $F_{A,B}(f)\circ F_{B,C}(g)=F_{A,C}(g\circ f)$,

(2) $F_{A,A}(1_A)=1_{F(A)}$

なるものをいう．

以下 $F_{A,B}(f)=F(f)$ と略記する．

集合を対象とし，集合間の写像を射とする圏(集合の圏)を (Sets) と記す．圏 $\mathcal{C}$ の対象 X に対して函手 $h_X\colon \mathcal{C}\to(\mathrm{Sets})$ を，$Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $h_X(Y)=\mathrm{Hom}(X,Y)$ と定義し，射 $f\colon Y\to Z$ に対して $h_X(f)\colon \mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$ を $h\mapsto f\circ h$ によって定義すると h_X は共変函手となる．一方，$h^X(Y)=\mathrm{Hom}(Y,X)$ と置くことによって反変函手 $h^X\colon \mathcal{C}\to(\mathrm{Sets})$ が定義できる．

圏 $\mathcal{C}_1$ から圏 $\mathcal{C}_2$ への共変函手 F, G に対して F から G への函手の射あるいは自然変換 φ は，$\mathcal{C}_1$ の各対象 A に対して写像 $\varphi(A)\colon F(A)\to G(A)$ が対応し，$\mathcal{C}_1$ の任意の射 $f\colon A\to B$ に対して $G(f)\circ\varphi(A)=\varphi(B)\circ F(f)$ を満足するものとして定義される．すなわち図式

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi(B)} & G(B) \end{array}$$

が可換となるものである．反変函手間の射あるいは自然変換も同様に定義できる．

共変函手 F から G への射の全体を $\mathrm{Hom}(F,G)$ と記す．圏 $\mathcal{C}$ から (Sets) への共変函手 F と $\mathcal{C}$ の対象 X が与えられたとき，X が定める共変函手 h_X から F への函手の射 $\varphi\colon h_X\to F$ に対して恒等射 $1_X\in\mathrm{Hom}(X,X)=h_X(X)$ の像 $\varphi(X)(1_X)\in F(X)$ を対応させることによって $\mathrm{Hom}(h_X,F)$ から $F(X)$ への写像が決まる．この写像は同型 $\mathrm{Hom}(h_X,F)\cong F(X)$ である(米田の補題)．

さらに，圏 $\mathcal{C}$ から (Sets) への共変函手 F に対して，F から $\mathcal{C}$ の対象 X から定まる共変函手 h_X への同型な射が存在するとき，函手 F は表現可能であるといい，X を函手 F を表現する対象であるという．表現可能である函手はグロタンディックの*スキーム理論で重要な働きをする．

干渉性

coherence

2つ以上の波がぶつかるとき，合成波として個々の波と異なる波の成分が現れることが多い．これを干渉(interference)といい，2つの波が干渉できることを干渉性を持つという．例えば，光などの回折(diffraction)は散乱波の干渉によると解釈されるが，これを波動方程式の問題と考えると，通常と異なる漸近挙動が現れ，数学的にも興味深い．

関数，函数

function

ある変量 x の値に応じて変量 y の値が定まるとき y は x の関数であるといい，x を独立変数または単に変数，y を従属変数という．

関数は一般に $y=f(x)$ のように表す．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ や 3 角関数 $f(x)=\sin x$ は関数の例である．関数を考えるときは $f(x)=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のように変数の動く範囲を指定し，これを関数の定義域という．定義域が明示されていないときは，できるだけ広い範囲にとるのが普通である．例えば $f(x)=1/(x-1)(x+2)$ の定義域は $x=1,-2$ を除くすべての実数である．独立変数や従属変数として複素数を考えることもある．また多くの変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ を持つ関数を考えることもあり $f(x_1,\cdots,x_n)$ のように表す．

古くは*多項式(整式)，*3 角関数，*指数関数，*対数関数などの具体的な式で表されるものだけが関数として扱われていたが(→ 初等関数)，解析学の厳密化にともなって 19 世紀末に関数の概念はつぎのように明確にされた．集合 X の各元 x にただ 1 つの実数(または複素数)$f(x)$ を対応させる規則を関数と呼ぶ．この意味での関数は写像の特別なものである．例えば数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集合 $X=\{1,2,\cdots\}$ の上で定義された関数 $f(n)=a_n$ と見ることができる．さらに $\mathbb{R}^n$ 値関数や $\mathbb{C}^n$ 値関数などを考えることもある．現在ではさらに一般化された関数の概念が考えられている(→ 超関数，汎関数)．

上で述べた関数の定義では，x に対してただ 1 つの値 $f(x)$ が対応するが，場合によっては，複数の値をとるものも関数ということがある．このような関数を多価関数といい，上で定義した通常の関数を 1 価関数と呼ぶ．逆 3 角関数や複素数を変数とする*対数関数は多価関数の例である．

関数解析学

functional analysis

微分方程式や積分方程式などの問題を，何らかの*関数空間上の方程式として定式化し，関数空間のさまざまな幾何学的あるいは代数的性質を用いて方程式の解の存在やその構造を論じる学問である．歴史的には，20 世紀初頭に*ヒルベルトとシュミット(E. Schmidt)が，*積分方程式に関するフレドホルム(E. I. Fredholm)の仕事を無限次元の関数空間上の問題として定式化し，その背景の代数的構造を明らかにしたことに始まる．つまり，関数解析学は，*線形代数学の無限次元版とし

幾何学

geometry

図形に関する数学．ほとんどの古代文明で，測量などの経験から得られる知識として，個別的な図形の性質が知られていたが，それらを演繹的な体系にまとめたのが古代ギリシアの幾何学である（ギリシア語の幾何学を表す言葉である geometria が，土地を意味する geo と，測量を表す metria の合成語であることは，幾何学の成り立ちを示している）．その集大成が，*エウクレイデス（ユークリッド）の著した『原論』であり，公理系を理論の出発点とする『原論』のスタイルは，数学のみならず広く学問のあり方の規範となった．『原論』に見られるように，古代ギリシアの幾何学は，主として直線図形と円に関する幾何学であったが，*アポロニオスらは円錐の平面による切り口として，楕円，放物線，双曲線の幾何学を展開し，*ケプラー，*ニュートンによる惑星の運動の解明において大切な役割を果たすこととなった．

17 世紀まで大きな変化を受けることのなかった古代の幾何学は，*デカルトの登場により大幅な進歩を遂げる機会を得た．実際，デカルトによる「代数的手法」は解析幾何学に発展し，幾何学のみならず解析学の発展にも大きく寄与したのである．その途上，微分積分学の応用として登場した曲面論は，*ガウスによってさらに深められた．一方で，エウクレイデスの時代から続いていた平行線の公理の証明の試みから，非ユークリッド幾何学が誕生した．このような時代の息吹の中で，*リーマンは多様体とその上の計量を定義して，3 次元空間内に制限されていた従来の幾何学を，一般次元で考えることができる枠組みを提供した．リーマンのこの考えは，後に*アインシュタインによる一般相対性理論の基盤を与えることとなったのである．リーマンはまた，解析関数の解析接続が存在する場として，現在リーマン面と呼ぶ曲面を考察し，複素関数論の諸事実に明快な幾何学的説明を与えた．多様体の概念は*ワイルやホイットニー（H. Whitney）らにより次第に整理され，20 世紀以後の幾何学の主役の位置を占めることとなる．デカルトに始まる解析幾何学は，別の方向への道も拓いた．すなわち，投影図法の研究に由来する射影幾何学やリーマン面の理論と結びつき，多変数代数方程式の解として表される図形を代数的手法で扱う代数幾何学に発展したのである．

射影幾何学や非ユークリッド幾何学など，19 世紀に一挙に花開いたさまざまな幾何学を，変換群の観点から統一的に整理しようとする試みが*クラインによってなされた（*エルランゲン・プログラム）．さらに*カルタンは，クラインの考え方を多様体の接空間に適用し，幾何学的構造をより広い立場から見ることを提唱した．20 世紀後半の微分幾何学の発展は，カルタンの考え方の延長線上にある．一方，19 世紀末には図形の位相的性質を探求する位相幾何学が誕生し，20 世紀数学の進展に大きな影響を与えた．

幾何級数

geometric series

*等比級数の別称．a, r を 0 でない定数として，級数 $\sum_{n=0}^{N} ar^n$ または $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ のことをいう．⇒ 級数

幾何光学

geometrical optics

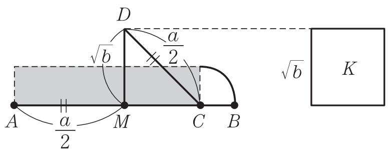
光は等質な媒質の中では直進し，異なる媒質の境界面で屈折や反射をする．これらの現象に着目し，回折や干渉など波動特有の現象は無視する光学の部門を幾何光学という．幾何光学は波長が 0 に近づく極限での光学現象を正確に表している．光の経路の決定には*フェルマの原理が用いられる．⇒ 波動光学

幾何代数

geometrical algebra

古代ギリシアの数学者は，幾何学を体系的な学問として確立したが，代数学はまったくといっていいほど発達させることはなく，現代の立場では代数に属する問題を，すべて幾何学，特に作図の問題として捉えていた．この理由から，古代ギリシアの数学のこの部分を，幾何代数と呼ぶことがある．

例えば 2 次方程式 $ax-x^2=b$ の解法も，次の作図問題として与えられている．「線分 AB と正方形 K を考える．このとき，AB 上の点 C を，AC, CB に等しい辺を持つ長方形 L の面積が K の面積と等しくなるように作図せよ」．



この解は次のように与えられる．線分 AB の中

共役調和関数

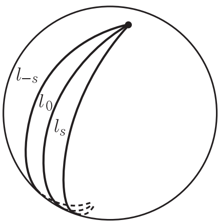
conjugate harmonic function

*正則関数の実部および虚部は常に*調和関数になる．与えられた実数値調和関数 $u(x,y)$ に対し，$u(x,y)+iv(x,y)$ が $z=x+iy$ の正則関数となるような実数値関数 $v(x,y)$ を $u(x,y)$ の共役調和関数という．$v(x,y)$ は $u(x,y)$ から*コーシー-リーマンの方程式 $\partial v/\partial x=-\partial u/\partial y$，$\partial v/\partial y=\partial u/\partial x$ を解いて定まる．$u(x,y)$ の定義されている領域 D が単連結ならば，共役調和関数は定数を加えるだけの任意性を除いてただ 1 つ存在する．

共役点

conjugate point

球面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ の北極 $(0,0,1)$ を通る 2 つの(任意の)*測地線すなわち大円は，南極 $(0,0,-1)$ で再び交わる．このように，曲面 Σ の 1 点 $p\in\Sigma$ を通る測地線の族 $l_s\colon[0,L]\to\Sigma$ $(l_s(0)\equiv p)$ であって，$l_0(L)=q$, $dl_s(L)/ds|_{s=0}=0$ なるものがあるとき，q を(p の測地線 l_0 に沿った)共役点という．一般のリーマン多様体でも同様に定義される．⇒ ヤコビ場



共役複素数　conjugate complex number　⇒ 複素数

共役部分群

conjugate subgroup

群 G の 2 つの部分群 H_1,H_2 について，ある $g\in G$ により，

$$H_2=gH_1g^{-1}\ \ (=\{ghg^{-1}\mid h\in H_1\})$$

となるとき，H_1,H_2 は G の中で互いに共役(きょうやく)といわれる．またこのとき，H_1 と H_2 は G の共役部分群であるという．

共役類

conjugacy class

群 G 上の*同値関係 $\sim$ を「$a\sim b\Longleftrightarrow a=gbg^{-1}$ となる $g\in G$ が存在する」により定義するとき，この関係の同値類を共役類という．$g\in G$ を含む共役類を $[g]$ により表す．

例　G を $X=\{1,2,\cdots,n\}$ の置換全体からなる群(置換群)とする．各 $\sigma\in G$ は互いに共通の文字を含まない*巡回置換の積

$$(j_1^{(1)},\cdots,j_{l_1}^{(1)})(j_1^{(2)},\cdots,j_{l_2}^{(2)})\cdots(j_1^{(k)},\cdots,j_{l_k}^{(k)})$$

に順序を除いて一意的に表すことができる．$l_1\leqq l_2\leqq\cdots\leqq l_k$ であるようにするとき，$(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ を置換 σ の型と呼ぶ．置換 σ, $\tau\in G$ が同じ共役類に属するための必要十分条件は，同じ型を持つことであることが知られている．

協力ゲーム

cooperative game

プレイヤー間で協定(提携(coalition)と呼ばれる)を結ぶことができるという状況設定のゲームである．提携の結果得られる利得は，プレイヤーの部分集合に実数を対応させる関数(特性関数)によって表現される．協力ゲームにおいては，提携の結果得られた利得をどのように配分するのが合理的か(あるいは，合理的な配分が存在するか)が中心的な問題となる．凸ゲームと呼ばれるクラスの協力ゲームは*マトロイド理論と関係が深い．⇒ ゲーム理論

行列

matrix

数や文字を長方形の表のように配列したもので，例えば，連立 1 次方程式を，あたかも単独の方程式 $ax=b$ のように扱う手段として使われる．19 世紀後半に，ハミルトン，グラスマン，ケイリー，シルベスターらによって完成された概念である．

(ア) 行列の定義

未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関する m 個の方程式からなる連立 1 次方程式

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{gathered}$$

を考える．これを単独の 1 次方程式 $ax=b$ に似た形にするため，

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\qquad(1)$$

および，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおく．そして，A と $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{y}{=}A\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

とおくことにより定義する．このとき，上記の連立 1 次方程式は，$A\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{b}$ と表すことができる．

(1)を，(m, n) 型の行列という．$m{\times}n$ 行列，m 行 n 列の行列ともいう．(m, n) を行列 A の型(またはサイズ)という．行列 A を構成する mn 個の数を，行列 A の成分(component)または要素(element, entry)という．また，a_{ij} を A の (i, j) 成分という．(i, j) 成分が a_{ij} であるような行列を $[a_{ij}]$ (ただし，$1{\leqq}i{\leqq}m$, $1{\leqq}j{\leqq}n$) と表す．略して $[a_{ij}]$ と表すこともある．(n, n) 型行列は，n 次の正方行列ともいう．上の $\boldsymbol{x}$ は $(n, 1)$ 型の行列であるが，n 項(または n 次)列ベクトルあるいは縦ベクトルともいう．さらに，$(1, n)$ 型の行列

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

を n 項(または n 次)行ベクトルあるいは横ベクトルという．また上の行列 A で横の成分の並び $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ をこの行列の第 i 行といい，縦の成分の並び

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

を第 j 列という．

(イ) 行列の相等

2 つの行列 A, B の型が等しく，A, B の対応する成分がすべて等しいとき，A と B は等しいという．

(ウ) 行列の和

$A{=}[a_{ij}]$, $B{=}[b_{ij}]$ を同じ型の行列とするとき，和 $A{+}B$ を，$[a_{ij}{+}b_{ij}]$ として定義する．

(m, n) 型の行列で，すべての成分が 0 であるものを，零行列といい，$O_{m,n}$ または O により表す．(m, n) 型の行列 A に対して

$$A + O = O + A = A.$$

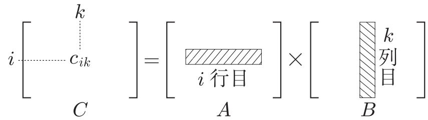
すなわち，零行列は数における 0 の役割を果たす．

(エ) 行列の積

(m, n) 型の行列 $A{=}[a_{ij}]$ と (n, p) 型の行列 $B{=}[b_{jk}]$ に対して，(m, p) 型の行列 $C{=}[c_{ik}]$ を次の式で定める．

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

C を A と B の積という．すなわち $C{=}AB$．C の (i, k) 成分 c_{ik} は，A, B の図の斜線部にある成分の積を足しあわせたものである．



行列の積で B が $(m, 1)$ 型の行列，すなわち m 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ である場合は，積 $A\boldsymbol{x}$ は(ア)の式(2)で定まる $\boldsymbol{y}$ である．

行列の積は次の性質を持つ．

(1)(結合律)　(m, n) 型の行列 A，(n, p) 型の行列 B，(p, q) 型の行列 C に対して，$(AB)C{=}A(BC)$．

(2)(分配律)　(m, n) 型の行列 A, A_1, A_2，(n, p) 型の行列 B, B_1, B_2 に対して $A(B_1{+}B_2){=}AB_1{+}AB_2$, $(A_1{+}A_2)B{=}A_1B{+}A_2B$．

一方，交換法則 $AB{=}BA$ は一般には成り立たない．また，零行列 O は $OA{=}AO{=}O$ を満たす．

*行列が定める線形写像を考えることにより，行列の積の定義の背景が明らかになる．

(オ) 単位行列

n 次正方行列で，(i, i) 成分 $(i{=}1, \cdots, n)$ がすべて 1 で，他の成分がすべて 0 である行列を単位行列と呼び I_n, E_n などと表す．単に I, E と書く場合もある．すなわち，

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(m, n) 型の行列 A に対して，$AI_n{=}I_mA{=}A$ が成り立つ．すなわち，単位行列は数の 1 と同様な役割を果たす．

(カ) 転置行列

(m, n) 型の行列 $A{=}[a_{ij}]$ に対して，(i, j) 成分が a_{ji} であるような (n, m) 型の行列を A の転置行列と呼び ${}^tA$ または A^{T} と表す．このとき ${}^t(AB){=}{}^tB\,{}^tA$ が成り立つ．

(キ) 可逆な行列と逆行列

n 次正方行列 A に対して，n 次正方行列 B で，$AB{=}BA{=}I_n$ となるものが存在するとき，A を可逆(あるいは正則)であるという．

n 次正方行列 A が可逆であるための必要十分条

件は，$AB{=}I_n$ となる B が存在することである．この条件は，$BA{=}I_n$ を満たす B が存在することとも同値である．このような B は A に対して一意的に決まる．B を A^{-1} と記し，A の逆行列という．

A が可逆であるための必要十分条件は，A の*行列式 $\det A$ が 0 と異なることである．

A の逆行列 A^{-1} が求められると，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{y}$ を，左から A^{-1} を掛けることにより，$\boldsymbol{x}{=}A^{-1}\boldsymbol{y}$ と解くことができる．ただし，実際の数値計算において逆行列を用いることはなく，*LU 分解を経由して $\boldsymbol{x}$ を求める(➡ LU 分解)．

逆行列は，*掃き出し法で求めることができる．また，*余因子行列を行列式で割ったものは逆行列に一致する．

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

が成り立つ．

（ク）体の元を成分とする行列

行列の成分としては，実数や複素数をとることが多いが，*代数系(とくに*体)の元を考えることもできる．F を実数の体 $\mathbb{R}$ や複素数の体 $\mathbb{C}$ あるいは一般の体とする．$M(m,n;F)$ により，F の元を成分とする (m,n) 型行列の全体を表す．F の元を成分とする n 次正方行列の全体 $M(n,n;F)$ を，$M(n,F)$ または $M_n(F)$ と表す．$M(n,1;F)$ は F の元を成分とする n 項(n 次)列ベクトルの全体であり，$M(1,n;F)$ は F の元を成分とする n 項(n 次)行ベクトルの全体である．簡単のため，$M(n,1;F)$ や，$M(1,n;F)$ を F^n と表すことが多い．

実数を成分とする行列を実行列，複素数を成分とする行列を複素行列という．

より一般に，多項式や*微分作用素を成分とする行列も，しばしば有用である．

行列が定める線形写像

linear mapping defined by matrix

*行列を与えれば*線形写像が定まり，逆に，線形写像は行列によって表現される(➡ 行列表示)．行列のさまざまな性質は，線形写像の性質に言い換えることによって，行列の性質の幾何学的意味が理解される．逆に，線形写像は，行列の形に表現することによって，具体的な計算が可能になる．線形写像という抽象的対象と行列という具体的対象を同時に「両にらみ」すると，より深い構造的理解とより広い応用可能性が得られる．

例えば，(m,n) 型の実行列 A を考える．このとき，n 次列ベクトルのなす線形空間 $\mathbb{R}^n$ から，m 次列ベクトルのなす線形空間 $\mathbb{R}^m$ への写像 T_A: $\mathbb{R}^n{\to}\mathbb{R}^m$ が

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

によって定まる(右辺は行列の積である)．このとき，写像 T_A は線形写像になる．つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2{\in}\mathbb{R}^n$ と定数 a,b に対して

$$T_A(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2) = aT_A(\boldsymbol{x}_1) + bT_A(\boldsymbol{x}_2)$$

が成り立つ．この T_A を行列 A が定める線形写像という．

A を (m,n) 型行列，B を (n,p) 型行列とする．このとき，写像の合成 $T_A{\circ}T_B$ について

$$\begin{aligned}(T_A \circ T_B)(\boldsymbol{x}) &= T_A(T_B(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\ &= (AB)\boldsymbol{x} = T_{AB}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，

$$T_{AB} = T_A \circ T_B$$

であり，行列の積は，線形写像の合成に対応する．

単位行列 E が定める線形写像 T_E は*恒等写像 I であり，可逆な正方行列 A の逆行列 A^{-1} が定める線形写像は T_A の逆写像である．すなわち，$T_E{=}I$, $T_{A^{-1}}{=}(T_A)^{-1}$．⇒ 行列表示

行列環

matrix ring

成分が整数，有理数，実数，複素数(あるいは一般の可換環の元)の n 次の正方行列の全体は，行列の加法，乗法により(非可換)環をなす．ただし，その零元は零行列で，単位元は単位行列である．成分が体の元の場合は，行列環は*代数(多元環)になる．

行列式

determinant

関孝和(1683)，ライプニッツにより導入され，解析幾何学の発展の中でクラメールらにより定義された概念である．行列の理論に先行して研究された．歴史的には，関やクラメールは高次連立方程式の変数を消去するための*終結式の理論から行列式の考え方に到達した．一方，ライプニッツは連立 1 次方程式の解法から行列式の考えに到達した．

（ア）行列式の定義

未知数と方程式の数が同じ連立 1 次方程式

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = u_2 \\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

虚数乗法

complex multiplication

例えば*楕円曲線 $E\colon y^2=x^3-x$ を考えると，$(x,y)\in E$ なら $(-x,iy)\in E$ であり，この写像 $(x,y)\mapsto(-x,iy)$ は，E から E への楕円曲線としての準同型になる．一般に E を楕円曲線とするとき，E から E への準同型は，整数 n について n 倍写像しかないのがふつうだが，上の写像は n 倍写像ではない．楕円曲線 E が整数倍写像でない準同型 $E\to E$ を持つとき，E は虚数乗法を持つという．

楕円曲線 E は，解析的には，$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ (τ は実数でない複素数)の形に表されるが，準同型 $E\to E$ とは，解析的には，複素数 α で $\alpha(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\subset(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ を満たすものについての α 倍写像 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\to\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ である．E が虚数乗法を持つことと，τ が*虚 2 次体に属することが同値である．τ が虚 2 次体に属せば，α は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\tau)$ に属し，この楕円曲線は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\tau)$ に虚数乗法を持つ，といわれる．例えば楕円曲線 $y^2=x^3-x$ は解析的には $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ であり，上の準同型 $(x,y)\mapsto(-x,iy)$ は，解析的には，i 倍写像 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)\to\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ であり，この楕円曲線は $\mathbb{Q}(i)$ に虚数乗法を持つ．整数倍写像でない楕円曲線の準同型は解析的には虚数 α を掛けることになるので，虚数乗法の名がある．⇒ クロネッカーの青春の夢

虚数単位　imaginary unit　⇒ 虚数，複素数，i

虚数部　imaginary part　＝虚部．⇒ 複素数

虚 2 次体

imaginary quadratic field

D を負の整数とするとき，$\mathbb{Q}$ 上で純虚数 $\sqrt{D}$ により生成される体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ を虚 2 次体という．有理数体の 2 次拡大体のうちで，実数でない元を持つものである．⇒ 2 次体

虚部

imaginary part

複素数 $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して y を z の虚部または虚数部といい，$\mathrm{Im}\ z$ により表す．⇒ 複素数

距離

metric

n 次元*ユークリッド空間の 2 点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ の間の距離を

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$$

とすれば，次の(1)(2)(3)が成り立つ：

(1) $d(x,y)\geqq 0$．$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$．

(2) 対称性　$d(x,y)=d(y,x)$．

(3) 3 角不等式　$d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$．

一般に，集合 X の任意の 2 点 x,y に対して実数 $d(x,y)$ が与えられ，(1)(2)(3)が成り立つとき，これを X 上の距離といい，(1)(2)(3)を距離の公理という．d は $X\times X$ の関数と考えられるので距離関数ということもある．距離があれば収束の概念が定義できる(➞ 距離空間)．⇒ ノルム，距離空間，擬距離

距離(集合間の)

distance

距離 $d(x,y)$ を持つ距離空間の中の 2 つの集合 A,B 間の距離は $\inf_{a\in A,\,b\in B} d(a,b)$ で定義される．⇒ 距離空間

距離化定理

metrization theorem

*第 2 可算公理を満たす正規空間(➞ 分離公理)は，ある距離空間と同相である．ウリゾンによって証明されたこの定理を距離化定理またはウリゾン–ティホノフの定理という．⇒ ウリゾンの補題

距離関数　metric function, distance function　⇒ 距離

距離空間

metric space

ユークリッド幾何学における 3 角不等式「3 角形 ABC において $AB+BC>AC$ が成り立つ」を基礎においた抽象的空間概念で*距離が定義された空間をいう．2 点間の「遠近」(距離)を量的に計ることのできる空間である．

集合 X とその上の距離 d の組 (X,d) を距離空間という．

例 1　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して $d(x,y)=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\}^{1/2}$ とおくと，$d(x,y)$

は距離を定める．この距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ はユークリッド空間にほかならない．

例 2　区間 [0,1] 上の連続関数の全体からなる集合を $C^0([0,1])$ と書く．このとき $f, g \in C^0([0,1])$ に対して $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$ とおくと，$(C^0([0,1]), d)$ は距離空間である．

例 3　他の距離の例として*p 進距離がある．p を素数とし，整数 n, m に対して，$n-m$ が p^d では割り切れるが，p^{d+1} では割り切れないとき，$d(n,m)=p^{-d}$ とおくと，d は距離(p 進距離という)を定め，$(\mathbb{Z}, d)$ は距離空間である．

例 4　集合 A の元を文字とする長さ n の語の全体 A^n において $x=(a_1, \cdots, a_n)$，$y=(b_1, \cdots, b_n)$ $(a_i, b_i \in A)$ に対して，$d(x,y)=\sharp\{i \mid a_i \neq b_i\}$ ($a_i \neq b_i$ である i の個数)とおくと距離になる．この距離を*ハミングの距離という．これは，*情報理論において重要な役割を果たす．

距離空間 X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および点 x に対して，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$ であるとき，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束するといい，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と記す．このとき，x は点列 $\{x_n\}$ の極限であるともいう．

距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ は，

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

が成り立つとき，*コーシー列という．より正確には，任意の正の数 ε に対して $m, n > M$ であれば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ が成り立つような M を見出すことができるとき，点列 $\{x_n\}$ をコーシー列という．これは通常の実数の数列の場合のコーシー列の拡張である．すべてのコーシー列が極限を持つとき，距離空間 X は*完備であるという．ユークリッド空間は完備である．一方，例 3 の p 進距離空間 $(\mathbb{Z}, d)$ は完備ではない(➞ p 進数)．例 2 の $C^0([0,1])$ の距離は，連続関数列が*一様収束すれば極限関数は連続であるので，完備な距離空間である．

距離空間 (X,d) から距離空間 (Y,ρ) への写像 f が $\rho(f(x), f(y)) = d(x,y)$ を満たすとき，f は等距離的あるいは等長的であるという．等距離写像は連続である．

距離空間では距離を使って*近傍や*開集合，*閉集合を定義することができ，*位相空間と考えることができる(➞ 距離の定める位相)．

距離空間の概念や，その上での収束や連続性は，位相空間に一般化される．

距離空間 (X,d) と X の部分集合 Y に対して，d の $Y\times Y$ への制限をやはり d と書くと，(Y,d) は距離空間になる．とくに，n 次元ユークリッド空間の部分集合は距離空間である．

距離づけ可能な空間

metrizable space

距離空間と同相な位相空間のこと．⇒ 距離化定理

距離の定める位相

topology induced by metric

距離空間 (X,d) の点 x と正数 ε に対して，$U(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$ とおいて，x の ε 近傍あるいは中心が x，半径 ε の球という．$\varepsilon>0$ と $x\in X$ をすべて動かしたときの $U(x,\varepsilon)$ 全体は，*基本近傍系の性質を満たすから，これにより X は*位相空間になる．

X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および点 x に対して，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$ であるとき，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束するといい，あるいは，x は点列 $\{x_n\}$ の極限であるといい，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と記す．

X の部分集合 A が次の性質を満たすとき，*閉集合といわれる．

A に含まれる任意の収束する点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ は A に含まれる．

また X の部分集合 B の各点 x に対して，x の ε 近傍が B 内に存在するとき，B は開集合という．閉集合の補集合は開集合であり，その逆も正しい．

X の閉(開)集合の全体は，閉(開)集合の公理を満たす．距離空間は，この位相の下で位相空間と考える．

距離空間は，正規空間(➞ 分離公理)でかつ*第 1 可算公理を満たす(➞ 距離化定理)．

X の部分集合 Y が有界であるとは，実数の集合 $\{d(x,y) | x, y \in Y\}$ が有界であることをいう．一般の距離空間では，有界閉集合がコンパクト集合とは限らない．⇒ 全有界，コンパクト(集合あるいは位相空間が)，アスコリ–アルツェラの定理

ギリシアの数学

Greek mathematics

伝説によれば，紀元前 6 世紀頃に活躍したと伝えられるタレスがエジプトで測量術を学び，それを幾何学に高めたとされる．また*ピュタゴラスとピタゴラス教団が紀元前 6 世紀頃から紀元前 4

$$y_j = x_j/r^2$$
$$(j=1,\cdots,n,\ r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,)$$

のもとで，$v(y)=r^{n-2}u(x)$ とおくと $\Delta_y v=r^{n+2}\Delta_x u$ が成り立つ．ここで Δ_x, Δ_y はそれぞれ変数 x, y に関する*ラプラシアンを表す．v を u のケルヴィン変換(Kelvin transform)という．特に u が調和関数であれば v も調和関数となる．

圏

category

ベクトル空間 V とその双対空間 V^* とは同型であるが，V と V^* の間の*カノニカル(自然)な同型の取り方は定まらない．一方，双対空間の双対空間 V^{**} と V の間には自然な同型が定まる．このような違いを明らかにするには，「カノニカルな同型」という概念を明確に定式化する必要がある．このような必要から生まれてきたのが圏論で，アイレンバーグ(S. Eilenberg)とマックレーン(S. MacLane)によって創始された．

厳密には次のように定義する．圏 $\mathcal{C}$ とは集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $A,B,C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して集合 $\mathrm{Hom}(A,B)$，および写像 $\circ\colon \mathrm{Hom}(B,C)\times\mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(A,C)$ が定まり次の性質を持つことをいう．

(1) $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$, $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$, $h\in\mathrm{Hom}(C,D)$ に対して，$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(2) $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$1_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$ が存在する．かつ $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$ に対して $1_B\circ f=f\circ 1_A=f$ が成り立つ．

$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の元を圏 $\mathcal{C}$ の対象(object)，$\mathrm{Hom}(A,B)$ の元を A から B への射(morphism)，$\circ$ を射の合成，1_A を恒等射と呼ぶ(圏論では $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を集合論の意味での集合とは仮定せず類であるとすることが多い．これは例えば，集合全体の圏を考えると $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合にならないからである．その立場では $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合である圏は小圏(small category)と呼ばれる)．

圏の間に*函手という概念を考えることができる(また函手の間の同型が定義される)．このとき最初に述べた例は，V を V^* に対応させる(反変)函手は，V を V に対応させる函手と同型でないが，V を V^{**} に対応させる函手は，V を V に対応させる函手と同型である，というように理解される．

元

element

集合とは「もの」の集まりであり，その「もの」のことを元または要素という．x が集合 A の元であることを，$x\in A$ と表し，そうでないことを，$x\notin A$ と表す．⇒ 集合

言語

language

数学でいう言語とは，文法(文字の繋がり方の規則)に従った文字列の集まりのことである．詳しくいえば，有限個の文字からなる集合(アルファベットという)から，文字を与えられた規則に従って有限個選んで並べて得られる列(語という)の集合を考えたとき，この集合の部分集合を(数理)言語という．例えば，$\{0,1\}$ をアルファベットとするとき，0 と 1 が交互に並び，最初と最後が 0 であるという規則に従う有限列の全体 $\{0,010,\cdots,0101\cdots10,\cdots\}$ は言語である．ある言語を定義する方法には，大別して，その生成規則を与える方法と，与えられた文字列がその言語に属するかどうかを判定する手順(アルゴリズム)を与える方法の 2 つがある．正規言語と呼ばれる言語のクラスは有限オートマトンによって認識される言語のクラスと一致する．

原始関数

primitive function

区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ に対して，導関数が $f(x)$ となる関数，つまり $F'(x)=f(x)$ を満たす I 上の関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．すなわち，原始関数を求めることは微分する操作とは逆の操作である．

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，任意の定数 C に対し $F(x)+C$ も原始関数である．逆に $f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ はある定数 C' を用いて $G(x)=F(x)+C'$ と表される．

$f(x)$ の原始関数の全体を

$$\int f(x)dx$$

と表し，これを $f(x)$ の不定積分(indefinite integral)という．$f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，不定積分を

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

のように表すことが多い．C を積分定数という．

関数の和に対する微分の公式 $(aF_1(x)+bF_2(x))'=aF_1'(x)+bF_2'(x)$ から，$f(x), g(x)$ の原始関数が存在すれば，$f(x)+g(x)$ の原始関数も存在して

$$A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t - I)$$

を考え，$T_t = \exp(tA)$ と考えたいところだが，一般には右辺の極限は存在せず，また何らかの意味で極限が考えられても，A は有界作用素になるとは限らない．⇒ ヒレ–吉田の定理

作用素ノルム

operator norm

*ノルム空間の間の*線形写像(作用素)$T\colon X \to Y$ に対して，

$$\|T\| = \sup_{\boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|T\boldsymbol{x}\|_Y}{\|\boldsymbol{x}\|_X}$$

とおく．ここで，$\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ は，それぞれ空間 X, Y のノルムとする．T が連続であるための必要十分条件は，$\|T\| < \infty$ となることである．$\|T\|$ を，T の作用素ノルムという．

X から Y への連続な線形写像全体 $\mathfrak{B}(X, Y)$ は，作用素ノルムに関してノルム空間になる．さらに，Y が*バナッハ空間であるときは，このノルムに関して $\mathfrak{B}(X, Y)$ もバナッハ空間である．特に $X = Y$ のときは，作用素 $T, S \in \mathfrak{B}(X, X)$ の積(合成) TS に関して不等式 $\|TS\| \leqq \|T\| \|S\|$ が成り立つ．

作用量

action

*解析力学の用語で，滑らかな曲線 $C\colon x = x(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して $\int_a^b L(\dot{x}(t), x(t))dt$ の形で与えられた*汎関数のことである(上の式で $\dot{x} = dx/dt$)．作用量積分，作用積分，作用などともいう．被積分関数 L をラグランジュ関数またはラグランジアンという．位置エネルギー $U(x_1, x_2, x_3)$ が定める力のもとで運動する質点の場合には

$$\int_a^b \left(\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3) \right) dt$$

である．⇒ ラグランジアン，最小作用の原理，ラグランジュ形式(力学の)

作用量積分　action integral　＝作用量

ザリスキー位相

Zariski topology

複素数体上の*代数多様体には，複素数の位相を用いて位相が定まる．それ以外の体，例えば有限体上の代数多様体にも位相を定義し，より幾何学的に研究することが可能である．そのとき用いられる位相がザリスキー位相である．代数多様体の上の*層を定義するにはザリスキー位相を用いる．

アフィン代数多様体 V の座標環を R とするとき，R のイデアル J から定まる V に含まれる*代数的集合を V の閉集合と考えることによって位相を入れることができる．これをアフィン代数多様体のザリスキー位相という．一般の代数多様体 V はアフィン代数多様体の貼り合わせと考えることができるので，アフィン代数多様体のザリスキー位相から V のザリスキー位相を定めることができる．ザリスキー位相は*ハウスドルフ位相ではない．⇒ 射影多様体，代数多様体

散逸性

dissipativity

物理学の用語としては，熱平衡の対極にあるもので，摩擦を伴う力学などのように，力学的なエネルギー等が熱に変わり失われていく不可逆過程を散逸的という．数学では，エネルギーや測度などが減少する方程式，確率過程，力学系などについて，保存的に対比して，散逸的という言葉を使う．

3 角関数

trigonometric function

直角 3 角形の頂点の角度を使って辺の長さの比を表すのが*3 角比である．これらを角度の関数と考えたものが 3 角関数である．原点を O とする座標平面において，単位円周上の点 $P = (x, y)$ をとる．正の x 軸と直線 OP とのなす角を*弧度法で測ったものを θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とするとき，余弦関数，正弦関数，正接関数はそれぞれ

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

で定義される．*一般角の考え方を用いてこれらの関数を任意の実数 θ に広げて考えたものを，3 角関数という．

3 角関数は次の*周期性を持つ．

$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$，$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$，
$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$.

さらに 3 角関数について加法定理が成り立つ(➞加法定理(3 角関数の))．

極限公式

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

は最も基本的なものである．この公式から 3 角関数の*微分公式 $(d/d\theta)\sin\theta = \cos\theta$, $(d/d\theta)\cos\theta = -\sin\theta$ が得られる．

3 角関数は*指数関数，*対数関数とともに，*多項式や*分数式，*無理式では表されない関数の代表的な例である(➞ 初等関数)．

フーリエに始まるフーリエ級数は，任意の周期関数を 3 角関数の無限和で表すもので，解析学の基本的な手段である(➞ フーリエ級数)．

3 角関数は複素数を変数とする関数にも拡張することができる(➞ オイラーの公式)．

3 角級数　trigonometric series　⇒ フーリエ級数

3 角行列

triangular matrix

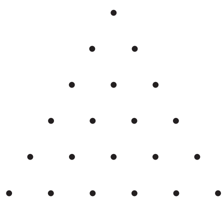
上または下 3 角行列のことをいう．⇒ 上(下) 3 角行列，LU 分解

3 角形分割　triangulation　＝単体分割

3 角数

triangular number

初項 1，公差 1 の*等差数列の n 項までの和 $n(n+1)/2$ を n 番目の 3 角数という．これは石を図のように 3 角形の形に並べたときの和となる．



3 角多項式

trigonometric polynomial

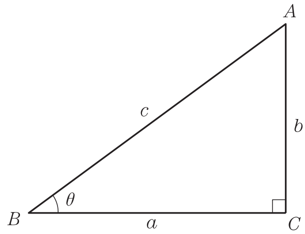
フーリエ級数が有限和である場合で，$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$，あるいは $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ の形の関数のことをいう．後者の形で見れば，e^{ix} と e^{-ix} の多項式である．

周期 2π の任意の連続関数は 3 角多項式によって一様に近似できることが知られている．⇒ フーリエ級数，ワイエルシュトラスの多項式近似定理

3 角比

trigonometric ratio

正弦(サイン，sin)，余弦(コサイン，cos)およびそれらから導かれる，正接(タンジェント，tan)，正割(セカント，sec)，余割(コセカント，cosec)，余接(コタンジェント，cot)の総称である．直角 3 角形 ABC で角 BCA が直角，角 ABC が θ，辺 AB, BC, CA の長さがそれぞれ c, a, b のとき，$\sin\theta=b/c$，$\cos\theta=a/c$，$\tan\theta=b/a$，$\sec\theta=c/a$，$\mathrm{cosec}\,\theta=c/b$，$\cot\theta=a/b$ である(図)．



3 角比を用いることで，3 角形の内角，辺，面積などの間の関係を調べることができる(➞ 3 角法)．⇒ 3 角関数

3 角不等式

triangle inequality

3 角形 ABC の辺の長さに関する不等式 $AB<BC+CA$ のことをいう．平面(空間)の中の一般の点 A, B, C に対しては $AB \leqq BC+CA$ が成り立ち，等号は C が線分 AB 上にあるときのみ成立する．

ユークリッドの『原論』においては，3 角不等式は平行線の公理(第 5 公準)を使わずに導かれる定理である．また，2 点を結ぶ曲線のなかで，直線が最短線を与えることを意味する定理である．

*距離の公理の 1 つである，不等式 $d(x,z) \leqq d(x,y)+d(y,z)$ は，上の 3 角不等式を抽象化したものである．ヒルベルトは，この 3 角不等式を公理系の中心に据えた幾何学の研究を提案した(➞ ヒルベルトの問題)．

3 角法

trigonometry

*3 角比を用いて図形を調べること．3 角形の 3 辺の長さ，2 辺の長さとその挟む角の大きさ，1 辺の長さとその両側の角の大きさ，のどれかが与えられたとき，残りの辺の長さ，角の大きさを計算する方法(3 角形の解法)などがその例である．

3 項漸化式

three-term recurrence

数列 $\{u_n\}$ に対して $u_n=au_{n-1}+bu_{n-2}$ $(a, b$

は定数)の形の関係式を 3 項漸化式という．

例えば，*フィボナッチ数列は 3 項漸化式 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ から決まる数列である．このような数列の一般項は，2 次方程式 $z^2 = az + b$ の 2 根を α, β として，$u_n = A\alpha^n + B\beta^n$ (A, B は定数)となる．ただし，重根の場合は，$u_n = (A + Bn)\alpha^n$ となる．

u_n がベクトル値の場合や係数 a, b が n に依存する場合を考えることもある．*直交多項式は一般に 3 項漸化式を満たす．

3 次曲線

cubic curve

複素射影平面 $P^2(\mathbb{C})$ 内で 3 次斉次式の零点 $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ で定義される代数曲線 C を 3 次曲線という．3 次曲線 C が特異点を持たないときは射影変換によって標準形

$$x_0 x_2^2 - 4x_1^3 + g_2 x_0^2 x_1 + g_3 x_0^3 = 0 \qquad (*)$$

に直すことができる．ここで $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ が成り立つ(すなわち$(*)$で定義される代数曲線が特異点を持たないための必要十分条件は $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ が成り立つことである)．非特異 3 次曲線には*アーベル群の構造を導入することができ，*楕円曲線になる．上記の標準形では無限遠点 (0:0:1) が群の零元 0 になり，直線と 3 次曲線との交点を P_1, P_2, P_3 とすると $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ となる．また，$P = (a_0 : a_1 : a_2)$ がこの非特異 3 次曲線の点であれば P の逆元 $-P$ は点 $(a_0 : a_1 : -a_2)$ で与えられる．一般の体の場合にも類似の理論が展開できる．

⇒ 楕円曲線

3 次元空間

3-dimensional space

座標 x, y, z で表される自由度 3 のユークリッド空間のこと．

3 次元多様体

3-dimensional manifold

曲面は穴の数(種数)と向きづけ可能性で，同相の意味で分類される(→ 曲面の位相幾何)．これは*ポアンカレが位相幾何学を創始する以前，19 世紀に実質的には知られていた．3 次元の場合へのその一般化は，位相幾何学の誕生とともにポアンカレによって問題とされた．2 つの曲面が互いに同相であるかどうかは，*ホモロジー群によって判定できる．しかし，ホモロジー群が 3 次元球面と同じでも，3 次元球面と同相でない 3 次元多様体が知られている(ポアンカレ球面)．より強く基本群が 3 次元球面と同じであるとすると，そのような多様体がすべて 3 次元球面と同相かどうかは，2000 年の時点で未解決問題で，*ポアンカレ予想と呼ばれる．

3 次と 4 次の方程式の解法発見の歴史

3 次と 4 次の代数方程式の解法に関しては，その発見について少々複雑なドラマがあるので年表風に簡単に解説する．なお，以下の出来事以前にアラビアの*オマル・ハイヤームが 2 次曲線の交点を使って 3 次方程式の正の根を幾何学的に表示していた．その成果を受けて 3 次方程式を代数的にどのように解くかが 15 世紀末から 16 世紀にかけてイタリア人の間で考えられ解決された．

登場人物　(すべてイタリア人)

シピオーネ・デル・フェッロ(Scipione del Ferro)(1465 頃-1520)　ボローニャ大学教授

アントニオ・マリア・フィオーレ(Antonio Maria Fiore)　デル・フェッロの弟子

ジロラモ・*カルダノ(Girolamo Cardano)(1501-76)　ボローニャ大学教授

ニッコロ・タルターリャ(Niccolo Tartaglia)(1500 頃-57)

ルドビコ・フェラーリ(Ludovico Ferrari)(1522-65)　カルダノの弟子

1514 年以前　デル・フェッロによる $x^3 + ax = b$ の解法の発見．ただし，その解法を公にせず，1520 年に世を去る．

1514 年(あるいは 1515 年)　デル・フェッロの弟子フィオーレがデル・フェッロから解法を教わる．

1535 年　タルターリャが $x^3 + ax^2 = b$ の解法を発見したことを公表．これを聞いたフィオーレがタルターリャに数学試合を申し込む．実際には，そのときタルターリャは $x^3 + ax^2 = b$ の不完全な解法しか持っていなかったが，試合期間(50 日)の最終日の 10 日前に完全な解法を発見，その翌日 $x^3 = ax + b$ の解法も発見した．その結果，タルターリャの勝利となる．しかし，その解法を公にすることは拒んだ．

1539 年　カルダノがタルターリャの解法を執拗に知りたがり，他には決して漏らさないという誓約の下でタルターリャの方法を伝授された．

1541 年　タルターリャが一般の 3 次方程式の解法を得た．

1545 年以前　カルダノの弟子フェラーリが 4

次方程式の解法を発見．

1545 年　カルダノが『*アルス・マグナ』を出版．フェラーリによる 4 次方程式の解法も載せられた．その中でタルターリャへの誓約を破って 3 次方程式の解法を公にした．タルターリャが激怒し，カルダノの背信行為を責める．

1547 年　カルダノに代わって，フェラーリがタルターリャと論争．両者の間で数学試合が行われるが引き分け．

3 次方程式

cubic equation

$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ $(a_0\neq 0)$ を 3 次方程式という．解法(カルダノの公式)については，*3 次方程式の根の公式を参照．

解法発見にまつわる経緯については，*3 次と 4 次の方程式の解法発見の歴史の項を参照．

3 次方程式の根の公式

formula giving roots of cubic equation

カルダノの公式と呼ばれる．まず，一般の 3 次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

において，両辺を a で割り，未知数 $x=X-b/3a$ とおくことにより，2 次の項がない 3 次方程式

$$X^3+3pX+q=0 \tag{1}$$

を得る．この方程式に対する根の公式を求めればよい．$p=0$ なら根は，$-q$ のすべての 3 乗根である．以下 $p\neq 0$ とする．A を q^2+4p^3 の 1 つの平方根，B を $(-q+A)/2$ の 1 つの 3 乗根，$C=-p/B$ とおく($p\neq 0$ と仮定したので，$B\neq 0$ であり，p/B がとれる)．$\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$ とするとき，(1)の 3 つの根は，

$$B+C,\quad \omega B+\omega^2 C,\quad \omega^2 B+\omega C$$

である．

例　$X^3+6X+2=0$ は次のように解かれる．この場合 $p=q=2$．A として $2^2+4\cdot 2^3=36$ の平方根 6 がとれ，B として，$(-2+6)/2=2$ の 3 乗根 $\sqrt[3]{2}$ がとれ，$C=-2/\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{4}$．よって 3 根は，

$$\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \omega\sqrt[3]{2}-\omega^2\sqrt[3]{4},\ \omega^2\sqrt[3]{2}-\omega\sqrt[3]{4}.$$

上に述べた(1)の根の公式の導き方を説明する．次の因数分解を使う．

$$X^3-Y^3-Z^3-3XYZ=(X-Y-Z)$$
$$\times(X-\omega Y-\omega^2 Z)(X-\omega^2 Y-\omega Z) \tag{2}$$

Y, Z として

$$Y^3+Z^3=-q,\quad YZ=-p \tag{3}$$

を満たすものを取れば，(1)は(2)の右辺の形になるから，根は

$$Y+Z,\quad \omega Y+\omega^2 Z,\quad \omega^2 Y+\omega Z$$

により与えられる．一方，(3)により，Y^3, Z^3 は 2 次方程式

$$t^2+qt-p^3=0$$

の根であるから，

$$Y^3=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4p^3}}{2}.$$

根の公式はこれから導かれる．⇒ 3 次と 4 次の方程式の解法発見の歴史

3 重積(ベクトルの)

triple product

3 次元のベクトルが 3 つ与えられたとし，それらを縦ベクトルで表し $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3$ とする．これらを横に並べると 3×3 行列 $[\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3]$ ができる．その行列式 $\det[\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3]$ のことを 3 重積または，スカラー 3 重積と呼ぶ．*内積 $\cdot$ と*外積 $\times$ を用いると，

$$\det[\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3]=\boldsymbol{V}_1\cdot(\boldsymbol{V}_2\times\boldsymbol{V}_3)$$

が成り立つ．

3 重対角行列　tridiagonal matrix　⇒ ヤコビ行列

算術幾何平均

arithmetic-geometric mean

$a>b>0$ に対し $a_0=a$, $b_0=b$, $a_{n+1}=(a_n+b_n)/2$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ $(n\geqq 0)$ と定めると $0<b_0<b_1<\cdots<b_n<\cdots<a_n<\cdots<a_1<a_0$ が成り立ち，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は共通の極限値に急速に収束する．この極限を $M(a,b)$ で表し，a, b の算術幾何平均という．

ガウスは等式

$$\frac{\pi}{2M(a,b)}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} \tag{$*$}$$

が成り立つことを発見し，これを 1 つの契機として楕円関数・モジュラー関数に到達した．ガウスの等式を示すだけならば次のランデン(Landen)変換を使えば容易である．($*$)の右辺を $I(a,b)$ とする．

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\phi}{a+b+(a-b)\sin^2\phi}$$

とおいて積分変数を φ から ϕ へ変換すると

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

ると，

$$\chi(M) = \sum_p i_p$$

が成り立つ．ここで，右辺は特異点 p 全体をわたる和を表し，$\chi(M)$ は M のオイラー数を表す．これをホップの指数定理と呼ぶ．

上で使った用語を以下説明する．ベクトル場の特異点とはベクトル場が 0 になる点を指す．ベクトル場 V を特異点 p の周りで，座標を使って表し，$V=\sum V^i\partial/\partial x^i$ とする（p は $(x^1,\cdots,x^n)=(0,\cdots,0)$ に対応するとする）．特異点 p が非退化とは，i,j 成分が $(\partial V^i/\partial x^j)(\mathbf{0})$ である行列が逆行列を持つことをいう．非退化な特異点 p に対して，この行列の実部が負の固有値の数（重複度を込めて数える）を d としたとき，p でのベクトル場 V の指数 i_p は $(-1)^d$ である．

2 次元の場合には，安定および不安定な特異点では指数は 1，*鞍点では指数は -1 である．

退化した場合も含めて特異点 p の指数は，次のように定義する．p を含む小さい球体の境界である $n-1$ 次元球面 S_ε^{n-1} を考え，$x\in S_\varepsilon^{n-1}$ に対して，

$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|} = F(x) \in S^{n-1}$$

とおく．$F\colon S_\varepsilon^{n-1}\to S^{n-1}$ の*写像度を p での V の指数と呼ぶ．

指数（有限群の）

exponent

有限群 G のすべての元 g に対して $g^n=e$，e は G の単位元，を満足する最小の正整数 n を G の指数，またはべき指数という．

指数（臨界点の）

index

点 $x=a$ が C^2 級の関数 $f(x)$ $(x=(x_1,\cdots,x_n))$ の臨界点であるときには 2 次近似式 $f(x)=f(a)+Q(x-a)+o(\|x-a\|^2)$ が成り立つ．ここで，

$$Q(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)x_ix_j$$

である．この 2 次形式 $Q(x)$ を定める対称行列，つまり，$(\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j)(a)$ を (i,j) 成分にもつ行列（*ヘッセ行列）の固有値の正のもの，0 に等しいもの，負のものそれぞれの（重複度を込めた）個数の組 (p,r,q) を臨界点 a の指数という（➡ シルベスターの慣性法則）．なお，$r=0$ のときは，q を指数ということもある．指数が $(n,0,0)$ ならば $f(x)$ は $x=a$ において極小となり，$(0,0,n)$ ならば極大となる．$r=0$ かつ $pq\neq 0$ のときは極大でも極小でもない．また，$r\neq 0$ の場合には指数だけからは判定できない．⇒ モース関数

指数型分布族

exponential family of distributions

例えば，指数分布やガウス分布，ポアソン分布などのように，密度関数が $\exp f(x;c)$ の形で，$f(x;c)$ がパラメータ c をうまくとると 1 次式で書けるような確率分布の族をいう．ただし，x や c はベクトルでもよい．数理統計で最も扱いやすい確率分布族で，モデルの推定などにしばしば用いられる．

次数環　graded ring　＝次数つき環

指数関数

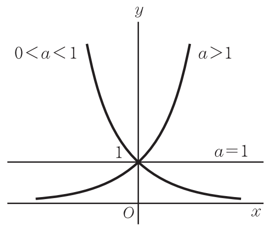
exponential function

正の数 a が与えられたとき，$-\infty<x<\infty$ に対して定義される正値連続関数 $f(x)$ で

$$f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad f(1) = a$$

となるものが一意的に存在する．そのような関数 $f(x)$ を a を底とする指数関数といい a^x と記す．$a^0=1$ であり，x が正整数 n に等しいとき，$a^n=a\cdot a\cdots a$（n 個の積），また $x=n/m$（m,n は正整数）ならば，$a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ である．

指数関数のグラフは次のようになる．



特に $a=e$（*自然対数の底）のときが最も基本的である．

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

が成り立つ．さらに $-\infty<x<\infty$ で

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

と*べき級数展開される．指数関数 e^x を $\exp x$ と表すこともある．⇒ 指数関数（複素関数としての），指数関数（行列の）

に対して成り立つテンソルが対称テンソルである．計量テンソル g_{ij} などが代表的な例である．⇒ テンソル

対称マルコフ過程

symmetric Markov process

*マルコフ連鎖は，推移確率行列（➞ 推移確率）が*対称行列のとき，対称という．一般には，推移作用素が（適当な*L^2 空間上で）対称なことをいう．

対称律

law of symmetry

*2 項関係 xRy において，

$$xRy \implies yRx$$

が成り立つこと．⇒ 関係，同値関係

対心点定理 antipodal point theorem ⇒ ボルスークの対蹠点定理

対数

logarithm

1 と異なる正の数 a が与えられたとき，任意の正の数 x に対して $a^y=x$ を満足する実数 y がただ 1 つ存在する（➞ 指数関数）．これを，a を底とする x の対数といい，$y=\log_a x$ と記す．また y を変数 x の関数と見て対数関数という．$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$ であり，加法公式 $\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$ $(x_1, x_2>0)$ が成り立つ．単に $\log x$ と記したときは，数学では*自然対数を意味することが多いが，理工学分野では*常用対数の意味に使い，自然対数は $\ln x$ で表すことが多い．*情報量については $\log_2 x$ を単に $\log x$ と書くことが多い．

対数は 1614 年*ネピアによって，掛け算を簡単に計算するための手段として導入された．天文学での計算の他に，当時盛んになった航海術の計算に使われ，またたく間にヨーロッパに普及した．実際の対数計算には，1617 年にブリッグス（H. Briggs）が提唱した常用対数が用いられた．

代数

algebra

*単位元 1 を持つ*可換環 K が*環 A に*作用し $1a=a$ $(a\in A)$，$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$，$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$，および $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ $(\lambda,\mu\in K,\ a,b\in A)$ が成り立つとき A は K 代数であるという．K 多元環ということもある．可換体 k 上の n 変数多項式環 $k[x_1,\cdots,x_n]$ は k 代数である．また，可換体 k の元を成分として持つ $n\times n$ 行列の全体 $M(n,k)$ も k 代数である．⇒ 構造定数

代数学

algebra

古代の数学ですでに，数値計算によって必要な答えを見出しただけでなく，方程式を立てそれを解くことによって答えを見出す努力がなされた．その際に，問題を幾何学的に表現して解くことが行われた．古代中国では連立 1 次方程式の係数を算木を使って表すことによって，連立方程式を記述し，消去法によって方程式を解いた．文字を使わないことを除けば，今日の連立方程式の解き方と実質的に同一であるが，問題解法のアルゴリズムとしてのみ捉えられ，それ以上の進展はなかった．方程式を一般的に表現する方法が確立してから方程式論に本質的な進展があったと考えられる．

文字式は，紀元 3 世紀頃アレキサンドリアで活躍したと伝えられる*ディオフォントス，インドでは 5 世紀に*ブラフマグプタによって導入され，中国では南宋から元にかけての時代につくられた．特に，南宋から元の時代の中国の方程式論は，1 変数高次方程式の係数を並べることによって方程式を記述し，さらに算木を使って方程式の根を望むべき精度で求めることができるほどに，高度に発達したものだった．ただ，ここでも，方程式の解法のアルゴリズムのほうが重要視された．

今日の代数学はアラビアの数学者*アル=フワーリズミーに始まると考えられる．彼は言葉を使って方程式を表現し，方程式の移項や項の簡約の概念を導入した．そして 2 次方程式をいくつかの標準形に直して，図形を用いてその正の根を求めた．アル=フワーリズミーの著書『アル=ジャブルとアル=ムカバラの計算』（Kitāb fi al-jabr wa al-muqābala）の移項を意味する al-jabr から algebra という代数を意味する言葉が生まれたといわれる．

アラビアの方程式論はルネッサンス期のヨーロッパに輸入され，タルターリャ，*カルダノによる 3 次方程式の解法，フェラーリによる 4 次方程式の解法が見出された．この時点ではまだ文字方程式の記法は確立していなかった．文字式は*ヴィエトの試みを受けて*デカルトによってほぼ今日と同じ形の記法が確立し，その後の数学の進展に大きく貢献した．特に，デカルトは解析幾何学を創始し，ある種の幾何学の問題が方程式を使って解く

ことができることを示し，代数学の進展を促した．

フェラーリ以降，長い間 5 次方程式の解法の研究が行われたが成功しなかった．*ラグランジュは 3 次，4 次方程式の解法を分析して，根の置換の概念に到達し，ガロア理論の誕生を準備した．一般の 5 次方程式は方程式の係数から四則演算とべき根を取る操作によって解く(代数的に解く)ことができないことが*アーベルによって示された．さらに，アーベルは代数的に 5 次方程式が解ける十分条件として，今日の言葉を使えば，方程式の*ガロア群がアーベル群であることを見出した．

アーベルの理論は*ガロアによって明確にされた．ガロアは有理数体 $\mathbb{Q}$ に方程式の係数を添加してできる体(正確には 1 のべき根を添加しておく必要がある) K を考え，体 K に方程式の根を添加してできる体 L の体 K での同型写像として方程式の根の置換を捉えることによって，方程式の代数的な解法の意味を明確にした．このガロアの考察によって，群や体などの代数系が数学の研究対象となっていった．

ガロアの理論とともに*ガウスによる数論の研究(特に 2 次体と 2 次形式の研究)と代数学の基本定理の証明も，その後の代数学の進展に重要な働きをした．さらにクンマー(E. E. Kummer)による理想数はデデキントによってイデアル論として書き直され，*ヒルベルトはガロア理論とイデアル論とを使って代数的整数論を構築し，数論のその後の進展のみならず，代数学の進展にも大きく貢献した．

19 世紀には不変式論が盛んであり，不変式の具体的な基底を求め，それが有限個であることを示すことが研究の中心であった．ヒルベルトは，ヒルベルトの基底定理を証明して，不変式の基底を直接求めなくても，それが有限個であることを証明し，当時の数学界に衝撃を与えた．一方，*リーマンによる代数関数論は代数幾何学の進展を促し，ヒルベルトの不変式論とともに多項式環の理論が進展する契機をもたらした．

このように，具体的な方程式を解くことや不変式の具体的な基底を求める研究から，方程式一般や群，環，体などの代数系を考察する研究に代数学の関心が移っていき，20 世紀初頭に抽象代数学が誕生した．

今日では，代数学は代数系を研究する学問であるということができる．そこで重要な役割をするのは代数系のもつ構造を明らかにし，対象間の関係として同型や準同型を考えることである．この研究態度はさらに，ある特徴をもった数学的な対象全体をひとまとめにして圏として捉え，圏の間の関係を函手として表現する手法へと発展し，今日の数学の基本的な考え方の 1 つとなっている．また，代数的な手法は代数学を越えて数学の種々の分野で重要な働きをしている．

代数学の基本定理

fundamental theorem of algebra

*複素数を係数に持つ 1 変数*多項式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

は複素数内に必ず*根を持つ．これを代数学の基本定理という．この事実は，複素数を係数にもつ*代数方程式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

は複素数内に必ず解を持つと言い換えることもできる．このとき，*因数定理により

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{m_1} \cdots (z-\alpha_l)^{m_l}$$

と因数分解できる．*体論の言葉を使えば，代数学の基本定理は，複素数体は*代数的閉体であることを意味する．

代数学の基本定理は，ダランベールにより不完全な形で証明され(1746)，*ガウスにより厳密に証明されたが(1798)，当時は複素数の概念が一般には認知されていなかったこともあり，ガウスは次のような形で表現した．

「実係数多項式 $a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ は実係数の 1 次式と 2 次式に因数分解される」

$$a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_h) \\ \times\{(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\}\cdots\{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2\}$$

一方，*アーベルとガロアの定理によれば，5 次以上の代数方程式は係数の加減乗除と*根号による根の公式を一般には持たない．この事実は代数学の基本定理に反しない．根が存在することと，根が根号という特別な手段を用いて表されるかどうかということは，別のことだからである．

代数関係式

algebraic relation

代数的な関係式を略して，代数関係式という．例えば，数または量 $x, y, z, \cdots$ が*多項式 $f(x, y, z, \cdots)$ を用いた関係式 $f(x, y, z, \cdots)=0$ を満たすとき，代数関係式という．

対数関数

logarithmic function

一般に，$a>0$, $a\neq 1$ として，a を底とする x

非再帰性

transience

*再帰性を持たないことをいう．⇒ 再帰性

微視的 microscopic ⇒ 巨視的

非巡回グラフ

acyclic graph

*有向閉路を持たない*有向グラフのことをいう．*無閉路グラフともいう．

p 乗可積分

p-summable

実数空間 $\mathbb{R}$ 上の実数値または複素数値の*可測関数 $f(x)$ が $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx<\infty$ を満たすとき，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で p 乗可積分であるという．⇒ L^p 空間

p 乗総和可能

p-summable

p を正数とする．実数列または複素数列 $\{a_n\}$ $(n\geqq 1)$ であって $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty$ であるとき，$\{a_n\}$ は p 乗総和可能であるという．$p\geqq 1$ ならば，これらの数列のなす集合は線形空間になる．⇒ ミンコフスキーの不等式，l^p 空間

p シロー部分群 p-Sylow subgroup ⇒ シローの定理

p 進距離

p-adic distance

素数 p に対して有理数体 $\mathbb{Q}$ に p 進付値 v_p を次のように定義する．整数 m に対しては m が p^a で割りきれるが p^{a+1} で割りきれないとき $v_p(m)=a$，m/n に対しては $v_p(m/n)=v_p(m)-v_p(n)$ と定義する．ただし 0 に対しては $v_p(0)=\infty$ と定義する．v_p を p 進付値という．

$$d_p(x,y)=p^{-v_p(x-y)}$$

とおくと d_p は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の*距離となる．これを p 進距離という．言い換えれば p 進距離は*p 進絶対値から定まる距離である．p 進距離では通常の*3 角不等式より強い

$$d_p(x,y)\leqq \max\{d_p(x,z),d_p(z,y)\}$$

が成り立ち，x, y, z 間の距離は少なくとも 2 つは等しい．すなわち，任意の 3 角形は 2 等辺 3 角形になる．

また，この距離から定まる位相(➞ 距離の定める位相)に関して a を中心とする閉円板 $\{x\in\mathbb{Q}\mid d_p(x,a)\leqq r\}$ $(r>0)$ は閉集合かつ開集合である．同様に a を中心とする円 $\{x\in\mathbb{Q}\mid d_p(x,a)=r\}$ も閉集合かつ開集合であり，通常の位相とは様相が異なっている．さらに，この距離空間は位相空間としては*完全不連結である．

代数体 K の素イデアル $\mathfrak{p}$ を使って同様に $\mathfrak{p}$ 進距離を導入することができる．

さらに一般に，体 K が非アルキメデス的乗法付値 v (➞ 非アルキメデス的付値)を持てば $d_v(x,y)=v(x-y)$ とおくことによって K に距離を入れることができる．これは p 進距離の一般化である．⇒ p 進絶対値

p 進数

p-adic number

素数 p に関して無限和

$$p+p^2+p^3+p^4+\cdots+p^n+\cdots$$

は通常の実数 $\mathbb{R}$ の*位相では収束しないが，*p 進絶対値 $|\cdot|_p$ では n 項までの和 a_n に対して $m\neq n$ ならば $|a_n-a_m|_p=p^{-\min\{m,n\}}$ となり，*p 進距離に関して $\{a_n\}$ は*コーシー列になる．この数列の p 進位相に関する極限値は $\dfrac{p}{p-1}$ になる．もっと一般に $k\in\mathbb{Z}$, $c_k,c_{k+1},c_{k+2},\cdots\in\mathbb{Z}$ に対し

$$c_kp^k+c_{k+1}p^{k+1}+c_{k+2}p^{k+2}+\cdots$$

は p 進距離に関して通常の実数ではなく，有理数体 $\mathbb{Q}$ を p 進距離で*完備化してできる*p 進数体の元に収束する．このような数を p 進数という．すなわち，有理数の数列 $\{a_n\}$ が p 進距離に関してコーシー列になるとき，その極限値を p 進数という．なお計算機科学では数を 2 進法で表現したとき，その数を 2 進数ということがある．この場合は数の表記法であり，上で説明した p 進数の $p=2$ の場合ではない．⇒ 2 進法，記数法

p 進数体

p-adic number field

有理数体の*p 進距離 $|\cdot|_p$ に関する*完備化を p 進数体といい $\mathbb{Q}_p$ と記す．p 進距離 $|\cdot|_p$ の性質により，p 進数体の元 x は $0, 1, \cdots, p-1$ を係数として

$$x=a_kp^k+a_{k+1}p^{k+1}+a_{k+2}p^{k+2}+\cdots$$

$(k\in\mathbb{Z})$ と書くことができる．$a_k\neq 0$ のとき $v_p(x)=k$ とおくと，$\mathbb{Q}_p$ 上の付値が定義できる．これは $\mathbb{Q}$ の p 進付値の p 進数体への自然な拡張

位時間あたりの拡散量 J は，その方向の濃度 c の勾配に比例する．つまり，その方向を x 方向とすれば，$J=-D\partial c/\partial x$ が成り立つ．これをフィックの第 1 法則といい，比例定数 D を拡散係数と呼ぶ．したがって，濃度の時間変化は，Δ を*ラプラス作用素として，$\partial c/\partial t=D\Delta c$ に従う．これをフィックの第 2 法則という．数学的には，熱伝導に関する*フーリエの法則とまったく同じ内容である．⇒ 拡散方程式，熱方程式

フィッシャー情報行列

Fisher information matrix

母数（パラメータ）$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_p)$ で決まる確率密度関数 $f(x,\theta)$ について，

$$I_{ij}=\int f(x,\theta)\frac{\partial(\log f)}{\partial\theta_i}\frac{\partial(\log f)}{\partial\theta_j}dx$$
$$=-\int f(x,\theta)\frac{\partial^2(\log f)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}dx$$

を (i,j) 要素とする p 次行列 $I=[I_{ij}]$（ただし，$i,j=1,\cdots,p$）をフィッシャー情報行列またはフィッシャー情報量という．フィッシャー情報行列は非負定値対称行列であり，これを計量として確率分布の空間に微分幾何学的な構造を考えることができる（➡ 情報幾何）．確率変数の実現値に基づいて母数 θ の値を推定するときの精度の限界を与える重要な量である（➡ クラメール-ラオの不等式）．⇒ 尤度

フィッシャー情報量　Fisher information　⇒ フィッシャー情報行列

フィボナッチ

Fibonacci

1170 頃-1250 頃　別名をピサのレオナルド（Leonardo Pisano）．イタリアのピサ出身の数学者．エジプト，シリア，ギリシア，シチリアなどに旅行し，その間にアラビア数学を含む多くの知識を吸収した．著書『算板の書』（Liber abacci）はインド記数法をヨーロッパに紹介した先駆的な書物である．⇒ ヨーロッパ・ルネッサンスの数学

フィボナッチ数列

Fibonacci's sequence

漸化式 $a_0=0, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqq 2)$ によって定まる数列 $0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots$ をフィボナッチ数列と呼ぶ．a_n はすべて整数であるが，一般項を表すには

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

のように $\sqrt{5}$ が必要になる．

a_{n+1}/a_n は $n\to\infty$ のとき，*黄金比に収束する．なおフィボナッチ数列の定義として $a_0=a_1=1$ を採用する流儀もある．⇒ 母関数

フィールズ賞

Fields Medal

1924 年にカナダのトロントで開催された*国際数学者会議（ICM）において，「会議の開催される 4 年ごとに傑出した業績を挙げた 2 人の数学者に，金メダルを授与する」という決議がなされ，そのときの書記であったフィールズ氏（J. D. Fields）が寄付した基金をもとにして始められた賞である．「現在の研究で，かつ将来に発展が見込めるもの」を賞の対象にするというフィールズ氏の意思に合わせるため，受賞者としては会議の時点で 40 歳を超えない数学者に制限することになった．1966 年には，数学者の人口が増えたこともあって，それぞれの会議で 4 人を上限にして賞を授与することが決まった．

以下の受賞者リストに名前と共にあげてあるものは受賞時までの主要な業績であり，公式な受賞理由とは限らない．

受賞者リスト

1936 年

Lars Valerian Ahlfors（1907-96）　被覆面の理論

Jesse Douglas（1897-1965）　プラトー問題の解決

1950 年

Laurent Schwartz（1912-）　超関数の理論

Atle Selberg（1917-）　素数定理の初等的証明

1954 年

小平邦彦（1915-97）　調和積分論

Jean-Pierre Serre（1926-）　位相幾何学とくにホモトピー論に関する業績

1958 年

Klaus Friedrich Roth（1925-）　ディオファントス近似

René Thom（1923-）　微分多様体のコボルディズム理論

1962 年

Lars Hörmander（1931-）　偏微分方程式の一般論に関する業績

John Willard Milnor（1931-）　球面の微分構

造および Hauptvermutung(基本予想)に関する業績

1966 年

Michael Francis Atiyah（1929–） 楕円型作用素の指数定理

Paul Joseph Cohen（1934–） 連続体仮説の独立性の証明

Alexander Grothendieck（1928–） スキーム理論の建設

Stephen Smale（1930–） 5 次元以上のポアンカレ予想の解決

1970 年

Alan Baker（1939–） 超越数論

広中平祐（1931–） 複素代数多様体の特異点の解消

Serge Novikov（1938–） 微分トポロジーにおける研究

John Griggs Thompson（1932–） 有限群の研究

1974 年

Enrico Bombieri（1946–） 素数分布・曲面・微分方程式の理論に関する業績

David Bryant Mumford（1937–） 幾何学的不変式論など代数幾何学に関する業績

1978 年

Pierre René Deligne（1944–） ヴェイユ予想の解決

Charles Louis Fefferman（1949–） 古典解析学の諸結果

Gregori Alexandrovitch Margulis（1946–） セルバーグ予想の解決

Daniel G. Quillen（1940–） アダムスの予想などの解決

1982 年

Alain Connes（1947–） 作用素環論(Ⅲ型ファクターの構造と分類)の研究

William P. Thurston（1946–） 葉層構造論および 3 次元多様体の研究

Shing-Tung Yau（1949–） 微分幾何学に現れる非線形偏微分方程式の研究

1986 年

Simon K. Donaldson（1957–） ゲージ理論の 4 次元位相幾何学への応用

Gerd Faltings（1954–） モーデル予想の解決

Michael H. Freedman（1951–） 4 次元ポアンカレ予想の解決

1990 年

Vladimir Drinfeld（1954–） ラングランズ予想および量子群に関する業績

Vaughan F. R. Jones（1952–） 作用素環論および結び目のジョーンズ多項式の発見など

森重文（1951–） ハーツホーン予想の解決および 3 次元代数多様体の極小モデル理論への貢献

Edward Witten（1951–） 理論物理学の方法の数学への応用に関する業績

1994 年

Jean Bourgain（1954–） バナッハ空間に関する研究

Pierre-Louis Lions（1956–） 非線形偏微分方程式に関する業績

Jean-Christophe Yoccoz（1957–） 力学系に関する業績

Efim Zelmanov（1957–） 制限バーンサイド問題に関する業績

1998 年

Richard E. Borcherds（1959–） ムーンシャイン予想の解決

W. Timothy Gowers（1963–） 組合せ論を用いた関数解析学の研究への貢献など

Maxim Kontsevich（1964–） 場の量子論の発想に基づく幾何などの研究

Curtis T. McMullen（1958–） 複素力学系に関する業績

なお，1998 年の*ICM では Andrew J. Wiles (1953–)は 40 歳を超えていたため，フィールズ賞に準じる特別賛辞が与えられた．

2002 年

Laurent Lafforgue（1966–） 関数体のラングランズ予想の解決

Vladimir Voevodsky（1966–） モチーフとモチビックコホモロジーに関する業績

フィルター

filter

位相空間における近傍系の概念を一般化したものである．集合 X の部分集合の族 Φ が次の性質を持つとき，X のフィルターと呼ばれる．

(1) 空集合 $\varnothing$ は Φ に属さない．

(2) $A \subset B \subset X$ で，A が Φ に属すとき，B も Φ に属す．

(3) A, B が Φ に属すとき，$A \cap B$ も Φ に属す．

で与えられる．⇒ フーリエ解析，フーリエ変換，高速フーリエ変換，固有関数展開，ディリクレ核，フェイエールの定理

フーリエ係数　Fourier coefficient　⇒ フーリエ級数

フーリエ積分

Fourier integral

直線 $(-\infty,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ を用いて，

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$$

の形に書かれた積分をいう．ただし $i=\sqrt{-1}$ で，パラメータ ξ は実数とする．この積分を ξ の関数と見たものが実質的に*フーリエ変換である．なお形式的には，区間 $[-L,L]$ 上で関数 $f(x)$ の*フーリエ係数

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\pi inx/L}dx$$

を考え，$L\to\infty$, $n\to\infty$, $n\pi/L\to\xi$ として $2Lc_n$ の極限をとれば，上のフーリエ積分 $\widehat{f}(\xi)$ が得られる．⇒ フーリエ級数

フーリエの法則

Fourier's law

熱伝導に関する基本法則をいう．等方的な物質内の空間座標 x，時刻 t における温度分布を $\theta(x,t)$ とするとき，各点における熱の流れ q は温度勾配 $\nabla\theta$ に比例し，$q=-K\nabla\theta$ と表される．この比例定数 K を熱伝導率と呼ぶ．⇒ 熱方程式

フーリエ変換(1 変数の)

Fourier transformation

$\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x)$ に対して

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$$

をそのフーリエ変換(Fourier transform)という．この操作のこともフーリエ変換(Fourier transformation)という．$f(x)$ が*急減少関数ならば逆変換の公式

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

が成り立つ．L^2 関数に対してもこれらの式は意味を持ち(➞ 平均収束)，L^2 ノルム $\|f\|_2=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$ はフーリエ変換で不変に保たれる：$\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$. 関数 $f(x)$ の x 倍 $xf(x)$，導関数 $(d/dx)f$ および合成積 $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy$ は次のように簡単な変換を受ける．

$$\widehat{(xf(x))}(\xi)=(-2\pi i)^{-1}\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi),$$

$$\widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi)=2\pi i\xi\widehat{f}(\xi),$$

$$\widehat{(f*g)}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

$f(x)$ が偶関数のときフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ も偶関数であって

$$\widehat{f}(\xi)=2\int_0^{\infty}f(x)\cos(2\pi\xi x)dx,$$

$$f(x)=2\int_0^{\infty}\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi\xi x)d\xi$$

が成り立つ．同様に $f(x)$ が奇関数のときはフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ も奇関数であって

$$\widehat{f}(\xi)=-2i\int_0^{\infty}f(x)\sin(2\pi\xi x)dx,$$

$$f(x)=2i\int_0^{\infty}\widehat{f}(\xi)\sin(2\pi\xi x)d\xi$$

となる．なおフーリエ変換の定義として

$$\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\xi x}$$

を採用することもある．⇒ フーリエ解析，フーリエ級数

以下にフーリエ変換の例をかかげる．$a>0$ とする．

$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
$e^{-x^2/a}$	$\sqrt{a\pi}\,e^{-a\pi^2\xi^2}$
$1/(x^2+a^2)$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|\xi\|}$
$\begin{cases}e^{-ax} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$	$\dfrac{1}{a+2\pi i\xi}$
$\dfrac{\sin ax}{x}$	$\begin{cases}\pi & (\|\xi\|<a/(2\pi))\\ 0 & (\|\xi\|>a/(2\pi))\end{cases}$

フーリエ変換(多変数の)

Fourier transformation

$\mathbb{R}^n$ 上の*可積分関数 $f(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(x=(x_1,\cdots,x_n))$ に対して，関数 $\widehat{f}(\xi)$ を

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx$$

と定義し，$f(x)$ のフーリエ変換(Fourier transform)という．ここで $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，また $\langle x,\xi\rangle$ は内積 $x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$ を表す．このとき

$$|\widehat{f}(\xi)|\leqq\|f\|_{L^1}\quad(\xi\in\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ($\|\cdot\|_{L^1}$ は L^1 ノルム).

$f(x)$ が，台がコンパクトな滑らかな関数のとき，$\widehat{f}(\xi)$ も滑らかな関数で $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属する．そしてフーリエ逆変換の公式

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

が成り立つ．また等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \qquad (*)$$

が成り立つ．これを*プランシュレルの定理という．フーリエ変換の定義はより一般に $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して拡張され，$(*)$が成り立つ．

*急減少関数の空間 $\mathcal{S}$ に属する $f(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は再び $\mathcal{S}$ に属し，$f(x)$ の*導関数は $\widehat{f}(\xi)$ の*多項式倍に，$f(x)$ の多項式倍は $\widehat{f}(\xi)$ の導関数の定数倍に写される．また，フーリエ変換は $\mathcal{S}'$ と呼ばれるクラスの超関数の空間に拡張される．これらの性質のため，フーリエ変換は定数係数の線形偏微分方程式を解析する強力な手段となっている．

なお，フーリエ変換の定義として，

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

を採用することもある．

プリュッカー座標

Plücker coordinates

例えば，2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の 1 次元線形部分空間 L は，1 次元*複素射影空間 $P^1(\mathbb{C})$ の点と次のように 1 対 1 に対応する．(a_1,a_2) を L の基底とするとき，L に $P^1(\mathbb{C})$ の点 $(a_1{:}a_2)$ を対応させる．これを一般化して，n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の r 次元線形部分空間 L に，$m=\binom{n}{r}-1$ として，L のプリュッカー座標と呼ばれる m 次元複素射影空間 $P^m(\mathbb{C})$ の点を対応させることができる．L の基底 $x^{(1)}=(x_{11},\cdots,x_{1n}),\cdots,x^{(r)}=(x_{r1},\cdots,x_{rn})$ をとり，$\binom{n}{r}=m+1$ 個の行列式の系 $\begin{vmatrix} x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_r} \\ x_{2i_1} & \cdots & x_{2i_r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{ri_1} & \cdots & x_{ri_r} \end{vmatrix}$ (ここで，$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r\leqq n$)の*連比が定義する $P^m(\mathbb{C})$ の斉次座標をプリュッカー座標という．$\mathbb{C}^n$ の 2 つの r 次元部分空間 L,L' のプリュッカー座標が一致すれば $L=L'$ である．プリュッカー座標の間には，プリュッカーの関係式と呼ばれる 2 次の関係式が成り立つ．

ブール代数

Boolean algebra

集合 A の*べき集合 $X=2^A$ には，$x+y=x\cup y$ (*和集合)，$x\cdot y=x\cap y$ (集合の共通部分)によって 2 項演算 $+,\cdot$ を定義することができ，

(1) $x+y=y+x,\ x\cdot y=y\cdot x$ (交換律)

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z,$
$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (結合律)

(3) $x+(y\cdot x)=(x+y)\cdot x=x$ (吸収律)

(4) $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z),$
$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ (分配律)

が成り立つ．さらに，空集合を 0，全体集合 X を 1 とおき，1 項演算 $x\mapsto x'$ を $x'=x^c$ (補集合)によって定義すると，任意の元 $x\in X$ に対して，$x+x'=1,\ x\cdot x'=0$ となる(相補律)．一般に，集合 X に，上のような性質を持つ 2 つの 2 項演算 $(x,y)\mapsto x+y,\ x\cdot y$ と 1 項演算 $x\mapsto x'$ が与えられたとき，これをブール代数という．ブール代数 X において，$x+y=y$ のとき $x\preceq y$ と定義すると，$\preceq$ は X 上の順序となり，1 がその最大元，0 がその最小元となる．ブール代数はブール(G. Boole)が論理計算をモデルとして導入した代数系である．

フルネ–セレの方程式 Frenet-Serret formula

⇒ 曲線の微分幾何

ブルバキ

Bourbaki, Nicolas

ニコラ・ブルバキは，1934 年フランスにおいて『数学原論』刊行の共同作業に加わった数学者集団のペンネームである．1939 年に最初の巻が出版されて以来，集合論，代数学，実 1 変数関数論，位相線形空間，積分，リー群とリー環，可換環，スペクトル理論，可微分多様体，解析多様体についての巻が継続的に出版されたが，現在は一応終止符が打たれている．しかし，ブルバキ・セミナーの名のもとに，現在でも最先端の数学について質の高い報告が行われており，セミナーノートの出版が続いている．

初期のブルバキのメンバーは，アンリ・カルタン(Henri Cartan, 1904–)，クロード・シュヴァレー(Claude Chevalley, 1909–84)，ジャン・クーロン(Jean Coulomb)，ジャン・デルサルト(Jean Delsarte, 1903–68)，ジャン・デュ

変換群

transformation group

空間に群が作用しているとき，この群のことを変換群という．⇒ 群，作用(群の)

変曲点

point of inflection

実 1 変数の実数値関数 $f(x)$ について，その凹凸が変わる境目の点のことをいう．$f(x)$ が C^2 級とし，$x<a$ で $f''(x)>0$，$x>a$ で $f''(x)<0$ が成り立つならば，$x=a$ が変曲点である．($x>a$ で $f''(x)>0$，$x<a$ で $f''(x)<0$ の場合も $x=a$ は変曲点である．) 例えば，$f(x)=x^3$ の変曲点は 0. $f(x)=x^n$ の場合は，n が奇数であれば，$x=0$ が変曲点で，偶数であれば変曲点は存在しない．

偏差

deviation

平均的な値からのずれ，偏り．絶対偏差，平均偏差，平均 2 乗偏差などがある．

偏差値

standard score

選抜試験の成績の相対的な順位などを判定するための目安として用いられる数値で，得点などを*標準偏差を 10，平均が 50 となるように換算したものである．数値の換算は

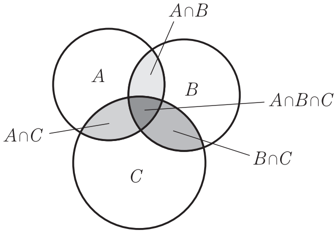
$$\text{偏差値} = \frac{\text{得点} - \text{平均点}}{\text{標準偏差}} \times 10 + 50$$

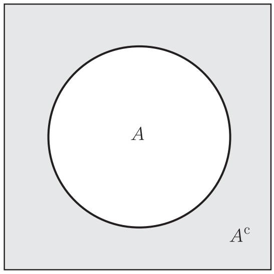
で与えられる．本来は，正規分布に従う(とみなしてよい)統計データに対して，平均から標準偏差の何倍ずれているかを示す数値のことである．本来正規分布に従わないものについて偏差値を用いると，誤った結論を導くことがあるので注意を要する．

ベン図

Venn diagram

集合の演算を図示する方法．





変数

variable

x^2-1 は x に実数や複素数を代入することができる．このように*集合 X の元を自由に代入できる文字 x (x の代わりに他の文字を用いてもよい)を変数といい，X をその変域という．このとき X の特定の 1 つの元を表す文字を定数という．一般に*関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ を $y=f(x)$ と表すとき x を独立変数，y を従属変数という．

変数分離(常微分方程式の)

separation of variables

微分方程式

$$P(y)\frac{dy}{dx} = Q(x) \qquad (*)$$

は両辺を積分して $\int P(y)dy=\int Q(x)dx$ と解くことができる．方程式$(*)$を変数分離形といい，$(*)$の形に微分方程式を書き直すことを変数分離という．微分方程式の初等的な解法としてもっともよく用いられる．⇒ 求積法

変数分離法

method of separation of variables

偏微分方程式 $\partial^2u/\partial x^2=\partial u/\partial t$ において，$u(x,t)=f(x)g(t)$ と仮定して方程式に代入すると

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

が得られる．左辺は x のみ，右辺は t のみの関数であるから，両辺は定数でなければならず，これを $-\lambda$ とおいて解けば $u(x,t)=e^{-\lambda t}(a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x)$ (a,b は定数) という解が見つかる．このように $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して積の形 $f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ ($f_i(x_i)$ は x_i だけに依存する関数)を仮定して解を探す方法を変数分離法という．方程式が線形のときはしばしばこの形の解を

研究を機に，多くの力学の問題を変分法の観点から見なおし，その結果「最小作用の原理」の考えにモーペルテュイと独立に到達した．さらに，抵抗媒質の中の運動を例外として，多くの力学的問題の答えが，この原理の下に説明できることを示した(1744)．そして，モーペルテュイの形而上学的な観点に批判的であったダランベール(J. R. d'Alembert)による研究を媒介として，「最小作用の原理」を純粋に力学の原理として定式化したのがラグランジュ(1760 年代)とハミルトン(1834)である．⇒ 変分法

変分法

calculus of variations

関数や曲線などを変数とする関数(*汎関数)に関する微分法，とくに汎関数の極大極小問題(*変分問題)の解法を変分法という．

例えば，始点 A と終点 B を固定した平面曲線のうちで，長さが最小のものは，線分 AB である．一般に，$F(x,y,z)$ を滑らかな関数として，始点 (a,a')，終点 (b,b') の曲線 c: $y=y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ について，汎関数

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

の極大極小問題を考えると，*臨界点(または停留点) $y=y(x)$ は，

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_z(x,y,y') = 0 \qquad (1)$$

を満たす必要がある．ただし F_y, F_z は変数 y, z に関する偏微分を表す．この方程式(1)をオイラー–ラグランジュ方程式または単にオイラーの方程式という．

実際，曲線 $y=y(x)$ が臨界点ならば，境界条件 $y_1(a)=y_1(b)=0$ を満たす滑らかな関数 $y_1(x)$ を任意に選び，この方向に h だけずらした曲線の族 $y=y(x)+hy_1(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を考えれば，$h=0$ が $J[y+hy_1]$ の臨界点となるから，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dh}J[y+hy_1]\bigg|_{h=0} \\ &= \int_a^b \{F_y y_1(x) + F_z y_1'(x)\}dx \\ &= \int_a^b \left\{F_y y_1(x) - \left(\frac{d}{dx}F_z\right) y_1(x)\right\} dx \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

が成り立つ(➡ ガトー微分)．$y_1(x)$ は任意だから，これより(1)が導かれる(➡ デュボア–レイモンの補題)．なお，通常の微分法で微分 dx, dy などを用いるのと同様な意味で，例えば上の(2)の第 2 式を $\int_a^b \{F_y \delta y(x) + F_z \delta y'(x)\}dx$ と表して，δy などを変分と呼ぶことも多い．

一般に，$\mathbb{R}^n$ 内の曲線 $y=y(x)=(y_1(x),\cdots, y_n(x))$ に対して，上と同様に始点と終点を固定して汎関数 $J[y]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ を考えれば，臨界点を与える関数(停留関数)が満たすべきオイラー–ラグランジュ方程式は

$$F_{y_i}(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{z_i}(x,y,y') = 0$$

$(i=1,\cdots,n)$ となる

さらに，例えば*極小曲面の問題のように曲面などの汎関数に関する変分法も研究されている．変分法は，*最速降下線を求める問題を契機として誕生し，18 世紀のオイラーやラグランジュの時代にはさまざまな問題に適用された．しかし無限次元空間における関数の最大値の存在はむずかしい問題をはらんでおり(➡ ディリクレの原理)，現代的な意味での変分法は 20 世紀後半になって完成した．この結果，偏微分方程式を変分問題に置き直して解の存在などを議論することもしばしば用いられる手法となっている．このような方法も変分法(variational method)という．⇒ 変分原理

変分問題

variational problem

*極大極小(あるいは最大最小)問題のことをいう．変分問題という場合は，多くは，無限次元空間上の関数すなわち汎関数に対する極大極小問題である．⇒ 変分法

偏連続

partially continuous

関数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ が，他の変数を固定してある変数 x_i について連続なとき，$f(x)$ は x_i について偏連続という．多変数関数としての連続性よりも弱い概念である．⇒ 連続関数(多変数の)

ペンローズのタイル張り Penrose tiling ⇒ タイル張り

$C(X,Y)$ に同値関係を定める．$\sim$ の同値類をホモトピー類と呼ぶ．

ホモロガス

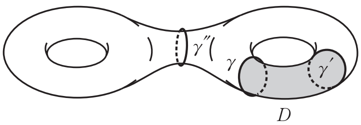
homologous

2 つの k 次元サイクルが同じホモロジー類に属することをいう．⇒ ホモロジー

ホモロジー

homology

曲面 Σ に対して，Σ に含まれる 2 つの向きの付いた閉曲線 γ, γ' を考える．γ と γ' がホモロガスである($\gamma\sim\gamma'$)とは，領域 D が存在し，その境界が γ と $-\gamma'$ であることをいう．ここで，$-\gamma'$ は γ' の向きを逆にしたものを指す(この定義は γ と γ' が交わっているときは多少不正確である)．曲面の向きの付いた閉曲線の集合に，ホモロガスなものを同値として同値関係を定めたとき，同値類全体は群になる．これを曲面の 1 次のホモロジー群という．より一般に，空間 M に含まれる k 次元の境界のない図形全体を考え，$k{+}1$ 次元の図形の境界になっているものは 0 として同値関係を入れたのが，k 次のホモロジー群である．



$\gamma\sim\gamma', \gamma\not\sim\gamma''$

上の説明で「k 次元の図形」と漠然と述べたが，正確に定義するには，いくつかのやり方がある．空間 M を*3 角形分割してその k 次元*単体の集合を $\{\Delta_1^k,\cdots,\Delta_N^k\}$ としたとき，Δ_i^k の整数係数の 1 次結合 $\sum a_i\Delta_i^k$ を「k 次元の図形」としたのが，*単体複体のホモロジー論である．また，k 単体から M への連続写像 $\sigma\colon \Delta^k\to M$ を特異 k 単体と呼び，特異 k 単体 σ_i の 1 次結合 $\sum\limits_i a_i\sigma_i$ を「k 次元の図形」とみなしたのが特異ホモロジー論である．どちらの場合にも，境界の概念が決まり，*鎖複体が定まる．

空間 X の k 次ホモロジー群を $H_k(X)$ または $H_k(X;\mathbb{Z})$ と書く．上では，整数係数の 1 次結合を考えたが，その代わりに，有理数係数，実数係数あるいは一般の可換環 R を係数とした 1 次結合を考えることができ，そのときは，$H_k(X;\mathbb{Q})$, $H_k(X;\mathbb{R})$，$H_k(X;R)$ と書く．

n 次元の球面 S^n のホモロジー群は，$H_k(S^n;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\,(k=0,n)$ で，その他の次数では 0 である．また，*種数が g の向き付け可能な閉曲面 Σ_g のホモロジー群は $H_0(\Sigma_g)=H_2(\Sigma_g)=\mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_g)=\mathbb{Z}^{2g}$ で，その他の次数では 0 である．

向き付け可能で境界のない n 次元コンパクト連結な多様体 M について，$H_n(M)=\mathbb{Z}$ である．さらに，同型 $H_k(M;\mathbb{Q})\cong H_{n-k}(M;\mathbb{Q})$ が成り立つ．これをポアンカレの双対定理と呼ぶ．

単体複体のホモロジー論，*特異ホモロジー論などさまざまなホモロジー論の定義の仕方があるが，通常の空間上ではすべて同一のホモロジー論を与えることが知られている．

同相な空間のホモロジー群は同型であるから，ホモロジー群を計算することで，2 つの空間が同相でないことを示すことができる場合がある．すなわち，ホモロジー群は位相不変量である．（さらに，*ホモトピー同値な空間のホモロジー群は同型である．）ホモロジー群は空間を与えると多くの場合計算可能であり，ホモロジー群を用いた同相でないことの判定は多くの状況で有効である．

ホモロジー代数

homological algebra

ホモロジー代数とは，*鎖複体(すなわち加群 C_i と準同型 $\partial\colon C_i\to C_{i-1}$ の列で，$\partial\partial=0$ を満たすもの)などを用いて，種々の代数系などを研究する分野を指す．鎖複体は位相幾何学の誕生時において，ホモロジー群の定義に現れた．ホモロジー代数という名前は，特定の対象を研究する分野というより，研究手法をいう．

ベクトル空間を扱う線形代数を，環の上の加群に一般化するとき現れる諸問題の研究はホモロジー代数の典型例である(➡ 平坦加群，射影加群，移入加群)．ホモロジー代数学は*圏論などとも結びついて，幾何学の諸分野，代数幾何学，整数論，代数解析学など現代数学の多くの分野で重要な役割を果たしている．⇒ 鎖複体，ホモロジー，コホモロジー

ボヤイ

Bolyai, János

1802–60 ハンガリーの数学者．ガウス，*ロバチェフスキーと並んで，非ユークリッド幾何学の発見者の一人．彼の父 Wolfgang も幾何学者であり，1832 年に出版された父の本の付録として，非ユークリッド幾何学を発表した．すでに 1823 年

ずみ，1704-72）によるといわれている．⇒ 和算

マップ

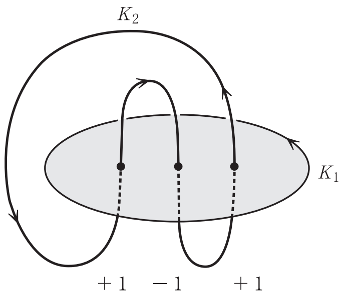
map

*地図あるいは*写像のこと．

まつわり数

linking number

2つの交わらない（向きのついた）*結び目 K_1, K_2 からなる絡み目のまつわり数 $Lk(K_1, K_2)$ とは，K_1 を K_2 から遠く離すとき，途中で K_2 と交わる数を，符号を含めて数えた総数である．正確には次のように定義する．K_1 の*ザイフェルト膜を Σ としたとき，$Lk(K_1, K_2)$ は Σ と K_2 の*交点数，すなわち交点 $\Sigma \cap K_2$ の数を符号を含めて数えたものである．



$Lk(K_1, K_2) = -Lk(K_2, K_1)$ が成り立つ．ホップ絡み目（➞ 絡み目）のまつわり数は 1 である．まつわり数は*ガウス–クロネッカーの積分と一致する．

マトリックス　matrix　＝行列

マトロイド

matroid

ベクトル空間における線形独立な要素の集合や，グラフにおける木に共通する組合せ的な性質を表現する，抽象的な離散構造である．マトロイドは単純な公理によって定義されているが，豊かな構造（➞ エドモンズの交わり定理）をもっており，いろいろな分野で基本的な離散構造と考えられている．とくに，離散最適化の分野においては，マトロイド構造と効率的なアルゴリズムの存在は不可分の関係にある（➞ 貪欲算法）．

マトロイドの概念を具体的な行列に即して説明する．行列が 1 つ与えられたとして，その列番号の集合を V とする．例えば，行列が

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} = [a_1, \cdots, a_5]$$

のとき，$V = \{1, \cdots, 5\}$ である．列ベクトルの線形独立性に着目して，V の部分集合 X を独立集合と従属集合に区別する．すなわち，$\{a_j \mid j \in X\}$ が線形独立，従属に応じて X を独立集合，従属集合と呼ぶ．独立集合の全体を $\mathcal{I}$ と書く．独立集合の部分集合は独立集合であるから，独立集合のうち包含関係に関して極大なもの（極大独立集合）に着目して基と呼び，基の全体を $\mathcal{B}$ と書く．同様に，従属集合を含む集合は従属集合であるから，極小従属集合に着目してサーキットと呼び，サーキットの全体を $\mathcal{C}$ と書く．上の例では，

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{&\{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \\ &\{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}, \\ \mathcal{C} = \{&\{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{1,3,4,5\}\} \end{aligned}$$

である．

独立集合族 $\mathcal{I}$ は次の組合せ的な性質を持っている：

(I1) 空集合は $\mathcal{I}$ に含まれる．

(I2) $Y \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq Y$ ならば $X \in \mathcal{I}$.

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| < |Y|$ ならば $X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ を満たす $y \in Y \setminus X$ が存在する．

基族 $\mathcal{B}$ は，（同時）交換公理と呼ばれる次の性質を持っている：

(B) 任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ と $i \in B \setminus B'$ に対して，ある $j \in B' \setminus B$ が存在して $(B \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{B}$ かつ $(B' \cup \{i\}) \setminus \{j\} \in \mathcal{B}$.

サーキット族 $\mathcal{C}$ は，次の性質を持っている：

(C1) 空集合は $\mathcal{C}$ に含まれない．

(C2) $C, C' \in \mathcal{C}$ かつ $C \subseteq C'$ ならば $C = C'$.

(C3) 任意の相異なる $C, C' \in \mathcal{C}$ と任意の $i \in C \cap C'$ に対して，$C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{i\}$ を満たす $C'' \in \mathcal{C}$ が存在する．

列ベクトルの線形独立性は，

$$\rho(X) = \mathrm{rank}\{a_j \mid j \in X\} \quad (X \subseteq V)$$

で定義される階数関数 $\rho: 2^V \to \mathbb{Z}$ によっても表現される．階数関数には次の性質がある：

(R1) $0 \leqq \rho(X) \leqq |X|$.

(R2) $X \subseteq Y \Longrightarrow \rho(X) \leqq \rho(Y)$.

(R3) $\rho(X) + \rho(Y) \geqq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.

最後の (R3) は劣モジュラー性と呼ばれる（➞ 劣モジュラー関数）．

このように，1 つの行列から列ベクトルの線形独立性の組合せ的側面を表現する $\mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \rho$ が定義

でき，上に述べた性質(I), (B), (C), (R)を持つ．ここで，性質(I), (B), (C), (R)は，もとの行列に言及することなく述べられているので，それぞれ，有限集合 V の上の集合族 $\mathcal{I}$，集合族 $\mathcal{B}$，集合族 $\mathcal{C}$，集合関数 ρ に関する条件として意味をなす．さらに，(I)を満たす $\mathcal{I}$，(B)を満たす $\mathcal{B}$，(C)を満たす $\mathcal{C}$，(R)を満たす ρ は，離散構造としては同値であって，互いに他を一意的に定めることが知られている．例えば，$\mathcal{B}$ が与えられたとき，$\mathcal{I}=\{I|I$ を含む $B\in\mathcal{B}$ が存在する$\}$ によって $\mathcal{I}$ が定まり，集合族 $\{S|S$ を含む $B\in\mathcal{B}$ が存在しない$\}$ の極小元の全体として $\mathcal{C}$ が定まり，$\rho(X)=\max\{|X\cap B|\,|B\in\mathcal{B}\}$ によって ρ が定まるという具合である．この意味で，条件(I), (B), (C), (R)は同一の離散構造の表現である．これをマトロイドと呼び，$(V,\mathcal{I})$, $(V,\mathcal{B})$, $(V,\mathcal{I},\mathcal{B},\mathcal{C},\rho)$, $(V,\mathcal{I},\rho)$ などと書き表す．また，V を台集合，$\mathcal{I}$ を独立集合族，$\mathcal{B}$ を基族，$\mathcal{C}$ をサーキット族，ρ を階数関数と呼ぶ．

グラフ G に対して，その*極大木(の辺集合)の全体 $\mathcal{T}$ は上の条件(B)を満たす．したがって，G の辺集合を台集合とし，$\mathcal{T}$ を基族とするマトロイドが定まる．このマトロイドにおけるサーキットは，G における単純な*閉路(サーキット)に対応している．

マハーヴィーラ

Mahāvīra

9 世紀のインドの数学者．インドの数学者には珍しく天文学の研究はしなかった．ジャイナ教で必要とされた大きな数の計算，順列・組合せなどから発展したジャイナ教の数学を集大成した．著書『ガニタ・サーラ・サングラハ』(計算・真髄・集成)のなかでは零に関する演算，分数の除法を逆数の乗法で行うこと，2 次方程式，不定方程式などが扱われ，この本はジャイナ教の数学についてサンスクリットで現存する唯一の専門的な文献である．⇒ インドの数学

魔方陣

magic square

1 から n^2 までの数を n 行 n 列の枡に区切られた正方形に配列し，各行および各列の数の和が一定の値 $n(n^2+1)/2$ となっているとき，この配列を魔方陣という．通常は，さらに対角成分の和もそれらと同じ値になるようなものを魔方陣ということが多い．左側は古代中国で知られていたもので，右側はデューラーの版画「メランコリー」の中に描かれている魔方陣である．

2	7	6
9	5	1
4	3	8

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

マリアヴァン解析

Malliavin calculus

マリアヴァンが提唱し(1978)，1980 年代に確立した，*ウィーナー空間上の微分積分学およびそれに基づく解析学である．*ガウス測度に関する*部分積分の公式がこの理論の構築の鍵であった．他の無限次元空間での解析学と比べて，微分と積分が自然につながるところに特徴があり，すべての方向への微分を考えず，カメロン-マーチン空間と呼ばれるヒルベルト空間の方向だけの微分を考えることが，それを可能にした．退化した*楕円型方程式の解の*正則性や，*アティヤ-シンガーの指数定理に対する確率論的な証明に応用されたことでその有用性が示された．⇒ 確率解析

マルコフ

Markov, Andrei Andreevich

1856–1922　ロシアの数学者．確率論における業績が著しい．プーシキンの小説『エフゲニー・オネーギン』を素材に，文章中に現れる文字間のつながりについての統計的な分析を行い，文字の系列などのように事象が相次いで起こるとき，各事象の起こる確率がそれに先行する事象の影響を受ける場合を考察する必要があることを見出し，マルコフ過程の概念を導入した．

マルコフ過程

Markov process

未来の事象の確率が，現在のみで決まり，過去の履歴に依存しないという性質(マルコフ性)をもった確率過程をいう．ランダムな運動を記述する確率モデルとして用いられ，*ブラウン運動はその代表例である．*マルコフ連鎖の場合と同様に，マルコフ過程は*推移確率を与えれば決定される．

マルコフ鎖　Markov chain　＝マルコフ連鎖

$\varphi^t(x_1,\cdots,x_n)\,(-\infty<t<\infty)$ は領域の体積を保つ，すなわち領域 D に対して $\varphi^t(D)$ と D の体積が等しい」という定理．

一般のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う流れ φ^t に対して，$\varphi^t(D)$ の体積の t による時間微分が，積分

$$\int_{\varphi^t(D)} \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(x)dx_1\cdots dx_n$$

で計算されることから示される．このことから，ハミルトン系が保存系であることが従う(この事実をリウヴィルの定理と呼ぶこともある)．⇒ 発散(ベクトル場の)，力学系，1 径数変換群

リー環

Lie algebra

体 F の元を成分とする n 次の正方行列全体を $M(n,F)$ とする．$[A,B]{=}AB{-}BA$ $(A,B{\in}M(n,F))$ と置くと以下の性質が成り立つ．

(1)(線形性)

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]\quad(a,b\in F),$$

(2)(反対称性) $[X,Y]=-[Y,X]$,

(3)(ヤコビの恒等式)

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

一般に，F 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}{\times}\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線形写像

$$(X,Y)\mapsto[X,Y]$$

が与えられ，上記の性質(1), (2), (3)が成り立つとき，この線形空間 $\mathfrak{g}$ をリー環(あるいはリー代数)という．$[\cdot,\cdot]$ をリー括弧積あるいは単に括弧積という．F が実数体 $\mathbb{R}$ のとき，$\mathfrak{g}$ は実リー環，F が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合は複素リー環と呼ばれる．とくに，$M(n,F)$ を括弧積 $[A,B]{=}AB{-}BA$ によりリー環とみなしたものを一般線形リー環といい，$\mathfrak{gl}(n,F)$ により表す．括弧積が恒等的に 0 であるリー環を可換なリー環という．

リー環 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{a}$ が，$\mathfrak{g}$ の線形部分空間で，しかも，括弧積について閉じている($X,Y{\in}\mathfrak{a}$ であれば $[X,Y]{\in}\mathfrak{a}$)とき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環という．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の括弧積に関してリー環になる．さらに，任意の $X{\in}\mathfrak{a},Y{\in}\mathfrak{g}$ に対して，$[X,Y]{\in}\mathfrak{a}$ であるとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の*イデアルという．イデアル $\mathfrak{a}$ について，商線形空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ には，自然にリー環の構造が入る．これを $\mathfrak{a}$ による $\mathfrak{g}$ の商リー環という．

リー環の間の写像 f: $\mathfrak{g}_1{\to}\mathfrak{g}_2$ が，線形写像であり，かつ $f([X,Y]){=}[f(X),f(Y)]$ $(X,Y{\in}\mathfrak{g}_1)$ を満たすとき，f を*準同型写像という．準同型写像 f の像 $f(\mathfrak{g}_1)$ は $\mathfrak{g}_2$ の部分リー環であり，核 Ker f は $\mathfrak{g}_1$ のイデアルである．

F 上の線形空間 V に対して，リー環の準同型写像 ρ: $\mathfrak{g}{\to}\mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の V への表現という．ここで $\mathfrak{gl}(V)$ は線形空間 V の自己準同型全体に括弧積を $[X,Y]{=}XY{-}YX$ $(X,Y{\in}\mathfrak{gl}(V))$ によって定めたリー環を表す．

体 F 上のリー環 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ に対して，$[X,Y]$ $(X{\in}\mathfrak{a},Y{\in}\mathfrak{b})$ の形の元の有限個の F 上の線形結合の全体を $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ と記すと，$[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ もリー環 $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．特に

$$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\quad \mathfrak{g}''=[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'],\quad \cdots,$$
$$\mathfrak{g}^{(i+1)}=[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}^{(i)}]$$

はリー環 $\mathfrak{g}$ のイデアルの減少列になる．

$\mathfrak{g}^{(k)}{=}\{0\}$ となる k が存在するとき，$\mathfrak{g}$ を可解リー環という．リー環 $\mathfrak{g}$ は最大の可解イデアル(リー環とみたとき可解リー環であるイデアル)を持つ(可解イデアル全部の和はまた $\mathfrak{g}$ の可解イデアルである)．これを $\mathfrak{g}$ の根基という．

根基が 0 であるとき，$\mathfrak{g}$ は半単純といわれる．0 と異なる半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のイデアルが $\mathfrak{g}$ と 0 以外にないとき，$\mathfrak{g}$ を単純という．⇒ 単純リー環，リー環(リー群に付随する)，リー群とリー環

リー環(無限次元の)

Lie algebra

ベクトル空間としての次元が無限大であるような*リー環を無限次元リー環という．有限次元の場合(➞ リー環(リー群に付随する))とは異なって対応するリー群は必ずしも存在しないが，無限次元リー環はそれ自体で独自の豊かな世界を作っている．カッツ(Victor G. Kac)とムーディ(R. V. Moody)は 1960 年代後半に，単純リー環の一般化として，生成元と関係式を使ってカッツ-ムーディ・リー環と呼ばれる無限次元リー環を定義し，その性質を調べた．下記のアフィン・リー環はその重要な例である．無限次元リー環は，物理や数学における対称性を記述する基本的な言葉であることが見出され，近年その研究が急速に進展している．

例 1 ハイゼンベルク代数

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と c を基底とするベクトル空間 H を考え，括弧積を

$$[a_n,a_m]=n\delta_{n+m,0}\cdot c,\quad [c,a_n]=[c,c]=0$$

と定義すると，H はリー環の構造をもつ．ここで $\delta_{i,j}$ は*クロネッカーのデルタである．リー環 H を*ハイゼンベルク代数という．

以下の例でも，元 c と任意の元 x の括弧積は

$[c,x]=0$ と定める．

例 2　ヴィラソロ代数(Virasoro algebra)

$\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と c を基底とするベクトル空間 V を考え，次の括弧積を導入する．

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}\cdot c.$$

この括弧積により V はリー環の構造をもつ．このリー環はヴィラソロ代数と呼ばれる．

例 3　アフィン・リー環(affine Lie algebra)

複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c$$

とおき，$\mathfrak{g}$ の括弧積を使って $\widehat{\mathfrak{g}}$ の括弧積を次のように定義する．

$$[X\otimes t^n,Y\otimes t^m]$$
$$=[X,Y]\otimes t^{m+n}+n(X,Y)\delta_{m+n,0}\cdot c.$$

ここで (X,Y) は $\mathfrak{g}$ の*キリング形式である．この括弧積によって $\widehat{\mathfrak{g}}$ はリー環の構造をもち，$\mathfrak{g}$ に付随するアフィン・リー環と呼ばれる．

リー環(リー群に付随する)

Lie algebra

リー環は，リー群を「線形化」した代数系である．

$$\exp\begin{bmatrix}0&-\theta\\\theta&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

のように，行列の*指数関数 exp は，n 次の交代行列(${}^tA+A=0$ を満たす行列)を n 次の直交行列(${}^tAA=I_n$ を満たす行列)に移す．(上には $n=2$ の場合を明示した)．これは，リー群とリー環の間の関係の例であり，n 次直交行列のなすリー群に付随するリー環が，n 次交代行列全体のなすリー環であることを主張している．

行列の指数関数 exp は，数の指数関数と異なり，和を積に移すわけではないが，n 次の実または複素正方行列 A,B について

$$A+B=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(\exp(xA)\exp(xB))$$

が成立する．ここに log は，行列の*対数関数である．また，

$$AB-BA=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\times$$
$$\log(\exp(xA)\exp(xB)\exp(-xA)\exp(-xB))$$

が成立する．このように，exp を通じて，和が積に対応し，$AB-BA$ が*交換子積に対応する．

行列からなるリー群 G に対し，すべての実数 x について $\exp(xA)\in G$ となる行列 A の全体を $\mathfrak{g}$ とする．このとき $A,B\in\mathfrak{g}$ ならば $A+B\in\mathfrak{g}$, $AB-BA\in\mathfrak{g}$ が成立し，$[A,B]=AB-BA$ と定めることにより $\mathfrak{g}$ はリー環になる．$\mathfrak{g}$ を G に付随するリー環という．

一般のリー群 G の場合には，そのリー環 $\mathfrak{g}$ は G 上の左不変ベクトル場の全体として定義される．$\mathfrak{g}$ はベクトル場の*括弧積についてリー環になる．また G の単位元 e における接空間を $T_e(G)$ とすると，$X\in\mathfrak{g}$ に e における値 $X(e)\in T_e(G)$ を対応させることによって，線形空間としての同型 $\mathfrak{g}\simeq T_e(G)$ が得られる．したがって $\mathfrak{g}$ の線形空間としての次元は G の多様体としての次元と一致する．

リー群に関する情報はほとんど，それに付随するリー環に含まれており，リー群に関する多くのことがらがリー環に関する事柄に翻訳される(➡リー群とリー環)．またリー群よりもリー環のほうが代数的な扱いができて理解しやすいので，リー群の研究をするのに，付随するリー環を研究することが有益である．

例 1　特殊線形群

$$SL(n,\mathbb{R})=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid \det g=1\}$$

のリー環は

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\mid \mathrm{tr}\,X=0\}$$

により与えられる(ただし，$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ は一般線形リー環を表す)．

例 2　直交群

$$O(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid {}^tgg=I_n\}$$

および特殊直交群(回転群)

$$SO(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid {}^tgg=I_n,\ \det g=1\}$$

のリー環は，交代行列全体

$$\mathfrak{so}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\mid {}^tX+X=O\}$$

により与えられる．

例 3　ユニタリ群

$$U(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid g^*g=I_n\}$$

のリー環は

$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\mid X^*+X=O\}$$

により与えられる(X^* は行列 X の*随伴行列を表す)．

例 4　特殊ユニタリ群

$$SU(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid g^*g=I_n,\ \det g=1\}$$

のリー環は

$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\mid X^*+X=O,\ \mathrm{tr}\,X=0\}$$

により与えられる．

力学

mechanics

物体間に働く力と物体の運動との関係を論じる

枠

frame

線形空間の基底を順番も含めて考えたものをいう．枠を与えると空間の*向きが決まる．

和算

Japanese mathematics

江戸時代に日本で独自に発達した数学．商業活動がアジア全体に拡がった室町時代末期に明時代の中国からそろばんが輸入され，そろばんに習熟することが求められた．そこでそろばんの学習書が必要とされるようになり，明時代の中国から数学書が輸入され学習された．さらに秀吉による朝鮮侵攻によって，朝鮮で使われていた中国の数学書が日本にもたらされ，そろばんに関連して注目を引くようになった．

1627 年に初版が発行された*吉田光由による『塵劫記』は単なるそろばんの学習書を超えた数学の優れた入門書として，多くの人が数学に興味を持つきっかけを作った．また，当時 800 年近く使われていた宣明暦(唐の徐昂の撰した太陰太陽暦)に天体現象から 2 日ほどのずれが生じていることから，改暦のために数学の研究が行われるようになった．そのためには高次方程式，不定方程式，さらには補間法の研究が必要とされ，暦法の研究は数学の進展に大きな刺激を与えた．江戸時代の改暦に関しては多くの和算家が関係した．

数学的には宋・元時代の中国の数学，特に方程式論(天元術と呼ばれた)を受け継ぎ，天元術の文字式の記法を改良・拡張して，*関孝和(せきたかかず，1640 頃–1708)によって任意変数の方程式の記述法(傍書法と呼ばれた)が創始され，和算興隆の基礎を作った．

和算では円周率の計算(円理)やそれと関連した 3 角関数や逆 3 角関数の無限級数展開に対応する無限級数展開(綴術)や種々の図形の面積の計算などが発達した．行列式の誕生やいくつかの無限級数の発見，また数値計算でのエイトケン加速やリチャードソン加速の適用など，個々の数学的な業績では当時のヨーロッパ数学よりも進んだ面もあったが，数学概念を体系的に発展させることはできなかった．

江戸時代の社会は平和が続き，大きく変化することもなく，そのために文化的に繁栄することができたが，自然科学の発達をそれほど必要とせず，数学を暦学と測量術以外で自然科学を活用する必要性が社会からは出てこなかった．そのため，和算は数学の理論を深化させる以上に，おもしろい図形の研究やおもしろい問題を作って解くことに関心が集中した．その結果，全国各地に和算の愛好家を輩出し，数学の教授で生活することのできる数学者が出現した．

また，和算愛好家は新しい問題の作成とその解法を競い，多くの人が集まる神社や寺に算額として掲げて得られた結果を発表し，全国的な規模での交流があった．また，和算関係の著書も多数印刷され，文化史的に世界的にも類を見ない文化現象をもたらした．

著名な和算家としては関孝和の他には彼の弟子であった*建部賢弘(たけべかたひろ，1664–1739)がいる．建部は著書『綴術算経』(てつじゅつさんけい)およびそれとほとんど内容が変わらない『不休綴術』の中で自己の数学観を語った．兄の賢明とともに関孝和に協力して『大成算経』を著した．これは関と建部を中心とした数学の集大成であった．

*松永良弼(まつながよしすけ，1692 頃–1744)は 3 角関数や逆 3 角関数の無限級数展開と実質的に同じものを得，*久留島義太(くるしまよしひろ，?–1757)は独創的な数学者として，行列式の*ラプラス展開，*オイラーの関数の発見などが伝えられている．和算は関孝和とかれの弟子の系統以外にも多くの流派があり，互いにその技を競っていた．関孝和が与えた免状の写しも伝えられているが，免許制度を整備し関流を作り上げたのは，松永や久留島に学んだ山路主住(やまじぬしずみ，1704–72)であった．また，久留米藩主であった有馬頼徸(ありまよりゆき，1714–83)は『拾璣算法』(しゅうきさんぽう)を著し，関流の秘伝を公開し，和算の進歩に貢献した．

山路主住に和算を学んだ*安島直円(あじまなおのぶ，1732–98)は極限操作を 2 回行う円理二次綴術を創始し，2 重積分の概念の近くまで到達した．1781 年には関流の藤田貞資(ふじたさだすけ，1734–1807)が『精要算法』を著し，その序文の中で「無用の用」としての数学の存在を主張した．会田安明(あいだやすあき，1747–1817)は藤田をはじめとする関流と争い，自ら最上流(さいじょうりゅう)を作って関流に対抗した．この論争を通して会田は和算の記号を改良し，和算の整理を行い，多くの弟子を育てた．

江戸末期の和算家としては定積分の表を作った和田寧(わだやすし，1787–1840)が著名である．また，関流の長谷川寛(はせがわひろし，1782–1838)が主宰する長谷川道場では『算法新

書』を出版し，関流の数学を詳しく解説して，和算はさらに全国的に拡がることになった．

和算では関数概念が発達せず，文字式は方程式としてのみ取り扱われ，多項式の概念はほとんど誕生せず，また無限級数も数値を精密に求めるための手続として取り扱われた．また数学の論理に対する関心が乏しかった．そのため，明治時代になって西洋の科学技術を輸入するために明治政府が西洋数学を学校数学に取り入れることとなり，和算は自然消滅する道をたどった．ただ，高度な数学への愛好や，理論を論理的に理解するよりは問題を解くことによって自然に納得する和算の特徴は今なお学校数学に引き継がれている．⇒ 円理，円周率，中国の数学，朝鮮の数学

和事象　union　⇒ 事象

和集合

union

2 つの集合 A, B に対して，A または B に属する元全体のなす集合を，A, B の和集合または合併集合といい，$A \cup B$ により表す．

2 つ以上の集合があるとき，すなわち，おのおのの $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 X_λ が定まっているときは，その和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{a \mid a \in X_\lambda \text{ となる } \lambda \in \Lambda \text{ が存在する}\}$$

で定義する．⇒ 集合，共通部分

和田寧　わだやすし

Wada, Yasusi

1787-1840　幕末期の和算で活躍した数学者．$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ などの定積分の表を 100 以上作成したことで有名である．当時盛んに考えられていた図形の面積や曲線の長さを求める問題が，この定積分の表を使って簡単に求めることができるようになった．定積分は被積分関数の無限級数展開を項別積分することによって求めた．無限級数が収束域を持つことに気づいた最初の和算家である．⇒ 和算

和の法則

sum rule

数え上げの原理の 1 つで，ある事柄について 2 種類の場合があり，それぞれについての場合の数が n, m のとき，その事柄についての場合の数は $n+m$ になることをいう．

割当問題

assignment problem

行列 $[w_{ij}]$ (ただし，$i, j=1, \cdots, n$) が与えられたとき，$\{1, \cdots, n\}$ の置換 σ の中で $\sum_{i=1}^{n} w_{i\sigma(i)}$ を最小にするものを求める問題である．*2 部グラフと各辺 a の重み $w(a)$ が与えられたとき，完全マッチング M の中で重み $w(M)=\sum_{a \in M} w(a)$ が最小となるものを求める問題として記述されることも多い．2 つの頂点集合をそれぞれ「人」の集合，「仕事」の集合と解釈するとき，マッチングは「人」を「仕事」に割り当てることを表現するので割当問題の名がある．*オペレーションズ・リサーチにおける基本的な問題の 1 つである．

割り算定理

division algorithm theorem

与えられた自然数 m, n に対して，

$$m = qn + r \quad (0 \leqq r < n)$$

を満たす整数 q, r が一意的に存在する．実際，

$$0, n, 2n, 3n, \cdots$$

という列を考えれば，$qn \leqq m < (q+1)n$ となるような数 q がただ 1 つ存在することが結論される．この q を用いて，$r=m-qn$ とすればよい．この定理を割り算定理という．q は商，r は余り(あるいは剰余)といわれる．

多項式についても，次の割り算定理が成り立つ．$f(x), g(x)$ を 2 つの多項式とするとき，もし $g(x) \neq 0$ であれば，

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (\deg r < \deg g)$$

となる多項式 $q(x), r(x)$ が一意的に存在する(deg は次数を表す)．このときも，$q(x)$ は商，$r(x)$ は余りといわれる．

割り算定理が成り立つような一般の代数系が考えられる(➡ ユークリッド環)．⇒ 剰余定理，因数定理

ワーリングの問題

Waring's problem

次の問題をワーリングの問題という．

「k を 1 より大きい自然数とする．すべての自然数 n を

$$n = x_1^k + \cdots + x_g^k \quad (x_1, \cdots, x_g \text{は整数})$$

の形に表すことができるような g は存在するか」

この特別な場合として，$k=2$ の場合を考える